Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 3. Juli 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe

https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

37. S. *Ein Randwertproblem und seine probabilistische Lösung* Es sei
$B := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 : \max(|a_1|, |a_2|) \le 10\}$, $\partial B := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 : \max(|a_1|, |a_2|) = 10\}$.
Wir betrachten den diskreten Laplaceoperator definiert durch

$$\Delta f(a) := \frac{1}{4}\left(f(a + e_o) + f(a + e_w) + f(a + e_n) + f(a + e_s)\right) - f(a),$$

dabei sind e_0, e_w, e_n und e_s die kartesischen Einheitsvektoren $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ und $(-1, 0)$, und $a \in \mathbb{Z}^2$ sei so, dass f auch an den 4 Nachbarpunkten von a definiert ist. Es sei X die gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$, und T die erste Treffzeit von ∂B.
a) Die Abbildung $h : \partial B \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(a_1, a_2) := a_1^2 - a_2^2$. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem[1]

$$\Delta u(a) = 0 \text{ für } a \in B \setminus \partial B, \qquad u(a) = h(a) \text{ für } a \in \partial B$$

von der Funktion

$$u(a) := \mathbf{E}_a[h(X_T)], \quad a \in B$$

gelöst wird.
b) Es sei $g : B \to \mathbb{R}$. Finden Sie ein Gleichungssystem, das von der durch
$v(a) := \mathbf{E}_a\left[\sum_{i=0}^{T} g(X_i)\right]$, $a \in B$, definierten Funktion v gelöst wird.

38. *Wie lange dauert das Spiel?* a) Es sei (X_n) eine gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$; $T_{\{0,\ell\}}$ bezeichnet die Treffzeit der Menge $\{0, \ell\}$. Zeigen Sie für $0 \le x \le \ell \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}_x\left[T_{\{0,\ell\}}\right] = x(\ell - x).$$

b) Zwei Spieler mit Vermögen v_1 und v_2 Euro (v_1, $v_2 \in \mathbb{N}$) spielen Partien mit gleichen Chancen. Der Verlierer zahlt dem Gewinner einen Euro. Das Spiel endet, wenn ein Spieler bankrott ist. Was ist (i) die Gewinnwahrscheinlichkeit von Spieler 1, (ii) die erwartete Anzahl von Partien?

39. S. *Drift zum Ursprung.* Es sei $p \in (1/2, 1)$. Die Markovkette X auf $\mathbb{Z}$ habe die Übergangsmatrix P, festgelegt durch:
$P(0, 1) = P(0, -1) = \frac{1}{2}$,
$P(a, a - 1) = p = 1 - P(a, a + 1)$ für $a > 0$,
$P(a, a + 1) = p = 1 - P(a, a - 1)$ für $a < 0$.
Bestimmen Sie
a) die Gleichgewichtsverteilung von X,[2]
b) $\mathbf{E}_0[R_0]$, wobei $R_0 := \min\{n > 0 : X_n = 0\}$ die *Rückkehrzeit* von X zum Ursprung ist.

40. Z.[3] *Ein diskretes Diffusionsmodell.* Es seien g, n und w natürliche Zahlen mit w, $n < g$.
a) Insgesamt g Kugeln, von denen w weiß sind, sind auf zwei Urnen verteilt. Dabei sind stets n Kugeln in der linken und $g - n$ Kugeln in der rechten Urne. In jedem Schritt wird rein zufällig eine Kugel aus der linken und eine aus der rechten Urne gewählt und die Kugeln werden in die jeweils andere Urne verfrachtet. Es sei X_m die Anzahl der weißen Kugeln in der linken Urne nach m Schritten und P die zugehörige Übergangsmatrix.
(i) Begründen Sie die Gleichheit $P(k + 1, k) = \frac{k+1}{n} \frac{g-n-(w-k-1)}{g-n}$ und finden Sie $P(k, k + 1)$.
(ii) Finden Sie die Gleichgewichtsverteilung von (X_m). (*Hinweis: Die Parameterbezeichnung ist mit Blick auf S. 30 im Buch suggestiv, die Reversibilität ist hilfreich. Sie dürfen o. B. verwenden, dass es in der vorliegenden Situation nicht mehr als eine Gleichgewichtsverteilung gibt.)*
b) *(5 € als Preis für die beste schriftliche Lösung)* Es sei $S := \{a \in \{0, 1\}^g : a_1 + \cdots + a_g = w\}$. Auf S betrachten wir die folgende stochastische Dynamik: Wähle rein zufällig ein Paar (i, j) mit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{n + 1, \ldots, g\}$ und vertausche die i-te und j-te Komponente von a. Zeigen Sie: Die uniforme Verteilung auf S ist Gleichgewichtsverteilung. Lösen Sie damit Teil a) ii) neu.

[1] Man spricht hier von einem (diskreten) Dirichlet-Randwertproblem.
[2] Sie dürfen verwenden, dass es zu dieser Übergangsdynamik nicht mehr als eine Gleichgewichtsverteilung gibt.
[3] optional für schriftliche Abgabe und zusätzliche Bonuspunkte