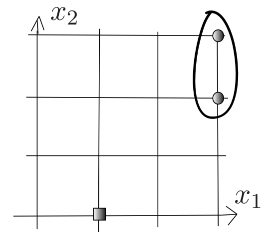
Prof. A. Wakolbinger — Blatt 1 — SoSe 2020

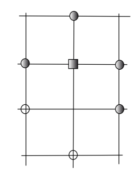
Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 1. Mai 2020, 10 Uhr
Anleitung zur Form der Abgabe: siehe
https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/EleSto20/Abgaben.html

1.S *(Treffwahrscheinlichkeiten* a) (Eine Nordost-Irrfahrt mit Drift nach Norden.) Ein Wanderer irrt durch $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: er erhöht in jedem Schritt "per Münzwurf" entweder seinen x_1- oder seinen x_2-Wert um 1, und zwar geht er in jedem Schritt mit W'keit 1/3 nach Osten und mit W'keit 2/3 nach Norden. (*Es handelt sich hier also nicht um eine gewöhnliche Münze – man denke eher an einen gewöhnlichen Würfel, bei dem zwei Seiten mit "Kopf" und vier Seiten mit "Zahl" beschriftet sind.*) Berechnen Sie (auf den Spuren Pascals) die Wahrscheinlichkeit, dass der Weg des Wanderers, wenn er in $(1, 0)$ startet, die Menge $\{(3, 2), (3, 3)\}$ *(damit ist gemeint: mindestens ein Element dieser Menge)* trifft.



b) Wir betrachten jetzt eine *gewöhnliche Irrfahrt* auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; bei dieser erfolgt der nächste Schritt jeweils zu einem aus den vier Nachbarpunkten rein zufällig ausgewählten. Der Startpunkt sei $(1, 2)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die Irrfahrt die Menge $\{(0, 1), (1, 0)\}$ vor der Menge $\{(0, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\}$?



2. S *(Reproduktionszahl und Aussterbewahrscheinlichkeit von binären Verzweigungsbäumen)*
a) *Der kritische Fall.* Wir betrachten einen Verzweigungsprozess startend mit einem Ahnen, in dem jedes Individuum "per Münzwurf" 0 oder 2 Kinder hat, jeweils mit W'keit 1/2. Berechnen Sie die Reproduktionszahl R und die Aussterbewahrscheinlichkeit α (letzteres ähnlich wie in der Vorlesung auf den Spuren von Pascal).
b) *Der superkritische Fall.* Wir betrachten die gleiche Situation wie in a), nur dass jetzt die Erfolgswahrscheinlichkeit des Münzwurfes nicht 1/2, sondern $\rho > 1/2$ ist.[1] Berechnen Sie R und α in Abhängigkeit von ρ. (Dabei dürfen Sie verwenden, dass in diesem Fall $\alpha(\rho) < 1$ gilt - das Argument hierfür ist ganz analog dem in der Vorlesung exemplarisch für ternäre Verzweigungsbäume besprochenen.)

3. *(Aussterbewahrscheinlichkeit von fast-kritischen Verzweigungsbäumen)*
a) *(Binärbäume)* Wir betrachten dieselbe Situation wie in Aufgabe 2b, mit
$\rho := \rho(\varepsilon) := \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$. Berechnen Sie $v := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{R(\varepsilon) - 1}{1 - \alpha(\varepsilon)}$.[2]
b) (*Ternärbäume*). Berechnen Sie das in Teil a) definierte asymptotische Verhältnis v auch für $\mathrm{GW}(3, \frac{1}{3}(1 + \varepsilon))$-Prozesse (anstelle der in Teil a) betrachteten $\mathrm{GW}(2, \frac{1}{2}(1 + \varepsilon))$-Prozesse), und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Teil a).

4. *(Kleine Erfolgswahrscheinlichkeiten, viele Versuche)* Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten einen fairen "Würfel", jetzt mit den n gleichwahrscheinlichen Ausgängen $1, 2, \ldots, n$ anstatt der gewöhnlichen sechs.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit v_n, dass bei n Würfen kein einziges Mal die 1 geworfen wird.
b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$.

[1] In der Diktion der Vorlesung haben wir damit einen $\mathrm{GW}(2, \rho)$-Prozess.
[2] $R - 1$ wird auch als (reproduktive) *Fitness* bezeichnet; $1 - \alpha$ ist die *Überlebenswahrscheinlichkeit.*