

Vorlesung 9b

Mehrstufige Zufallsexperimente

Teil 3

Markovketten als
spezielle mehrstufige Zufallsexperimente

(Buch S. 94)

Zur Erinnerung:

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

hat man für jedes $i = 1, 2, \dots$

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \dots a_i, a_{i+1}) = P_{a_1 \dots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i + 1)$ -ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \dots, X_i = a_i\}$.

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:

alle X_i haben ein-und denselben Wertebereich S

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\dots a_{i-2} \textcolor{red}{a_{i-1}}, a_i) = \textcolor{red}{P}(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**
auf dem Zustandsraum S mit Übergangsmatrix $\textcolor{red}{P}$.

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \dots$ indiziert.

Man denkt sich die **Übergangsmatrix** P als fest
und notiert die **Verteilung** ρ von X_0 (die “Startverteilung”)
als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit P .

Also insbesondere:

$$P_{\rho}(X_0 = a_0) = \rho(a_0).$$

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\begin{aligned} & P_{\rho}(X_0 = a_0, \dots, X_n = a_n) \\ &= \rho(a_0) P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

Startet die Kette in $a \in S$,
dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung
(notiert als $\rho = \delta_a$).

Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$
und erhält

$$\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,$$

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) .$$

Beispiele für Markovketten

(Buch S. 98)

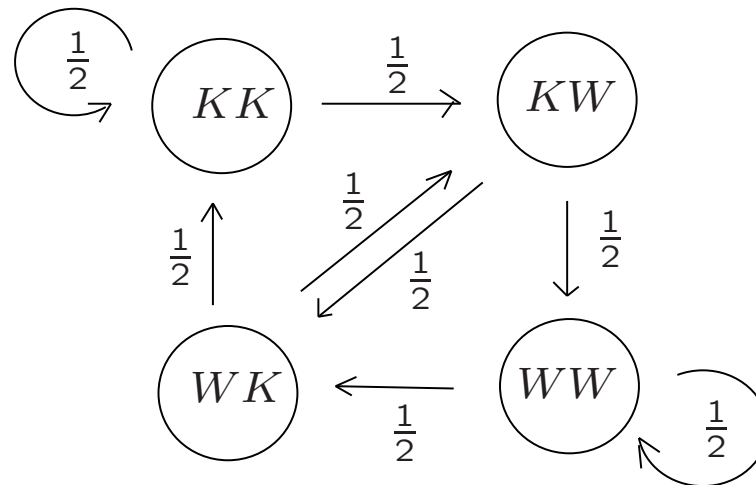
Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

$Z_0, Z_1, \dots$ unabhängig und uniform verteilt auf $\{K, W\}$,

$$X_n := (Z_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



Beispiel 2:

(p, q) -Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$, $S := \mathbb{Z}$

$$P(k, k + 1) := p, \quad P(k, k - 1) := q$$

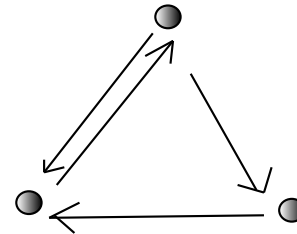
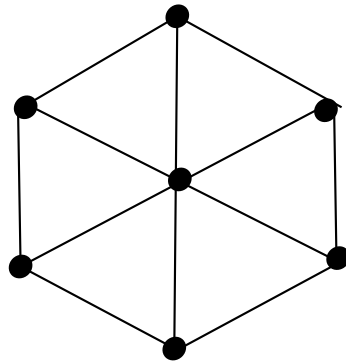
Die Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix P und Start in a ist dann so verteilt wie $(a, a + Z_1, a + Z_1 + Z_2, \dots)$, wobei Z_1, Z_2 , unabhängig sind mit $P(Z_i = 1) = p$, $P(Z_i = -1) = q$.

(Übung: Beweise die behauptete Verteilungsgleichheit für die Anfangsstücke bis zur Zeit n mit vollständiger Induktion.)

Daraus sieht man sofort:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a[X_n] &= a + n(p - q), \\ \mathbf{Var}_a[X_n] &= 4npq. \end{aligned}$$

Beispiel 3:
Einfache Irrfahrt
auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen



$S :=$ die Menge der Knoten.

Der nächste Schritt erfolgt jeweils
zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 4:

Die Pólya-Urne als Markovkette auf $\mathbb{N}^2$

$$S = \{(r, b) : r, b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((r, b), (r + 1, b)) := \frac{r}{r + b},$$

$$P((r, b), (r, b + 1)) := \frac{b}{r + b}.$$

Das modelliert dieselbe Situation wie in Teil 2,
allerdings “sparsamer”:

als aktueller Zustand wird nicht der gesamte bisherige Pfad, sondern nur
die Anzahl der weißen und blauen Kugeln in der Urne mitgeführt