Vorlesung 9a

Bedingte Verteilung, bedingte Wahrscheinlichkeiten

Teil 5:

Bedingter Erwartungswert als Erwartungswert unter der bedingten Verteilung

(Buch S. 112)

In einem zweistufigen Experiment hatten wir im diskreten Fall:

(vg. Vorlesung 8b, Teil 1):

$$\mathbf{E}_{a_1}[g(X_1, X_2)] = \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

Eine Formulierung, die *auch* für den kontinuierlichen Fall passt, ist:

$$\mathbf{E}_{a_1}[g(X_1, X_2)] = \int_{S_2} g(a_1, a_2)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in da_2)$$

Im Fall mit Dichten (und $S_1 = S_2 = \mathbb{R}$) wird dies zu

$$\mathbf{E}_{a_1}[g(X_1, X_2)] = \int_{\mathbb{R}} g(a_1, a_2)\frac{f(a_1, a_2)}{f_1(a_1)}da_2$$

Analog zu der in Teil 1 eingeführten Notation

$$(*) \qquad \mathbf{P}(X_2 \in (\cdot) | X_1 = a_1) := \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in (\cdot))$$

schreiben wir auch

$$\mathbf{E}_{a_1}[g(X_1, X_2) | X_1 = a_1] := \mathbf{E}_{a_1}[g(X_1, X_2)]$$

und sprechen vom *bedingten Erwartungswert*

von $g(X_1, X_2)$, *gegeben* $\{X_1 = a_1\}$.

Der bedingte Erwartungswert ist (für gegebenes a_1)

eine Zahl!

Setzen wir in $(*)$ X_1 statt a_1 ein,

dann bekommen wir eine Zufallsvariable

und sprechen von der

bedingten Erwartung von $g(X_1, X_2)$, gegeben X_1:

$$\mathbf{E}\big[g(X_1, X_2) \,|\, X_1\big] := e(X_1),$$

mit

$$e(a_1) := \mathbf{E}\big[g(X_1, X_2) \mid X_1 = a_1\big].$$

Beispiel:

$Z = (Z_1, \ldots, Z_{10})$ sei ein p-Münzwurf der Länge 10,

$$K := \sum_{i=1}^{10} Z_i.$$

Die *Runs* in $(z_1, \ldots, z_{10})$ sind die

(in keinem größeren solchen Block enthaltenen)

Blöcke aus nur Nullen oder nur Einsen.

Z. B. hat $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ fünf Runs:

$0, 11, 00, 11, 000.$

Sei R die Anzahl der Runs in $(Z_1, \ldots, Z_{10})$.

Gefragt ist nach $\mathbf{E}[R|K = 4]$.

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^{9} I_{\{\text{beim } i\text{–ten Wurf beginnt ein Run}\}} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{9} I_{\{Z_i \neq Z_{i+1}\}} =: g(Z).
\end{aligned}
$$

Wir wissen aus Teil 3:

Die bedingte Verteilung von $(Z_1, \dots, Z_{10})$ gegeben $K = 4$

entsteht so, dass man aus den Plätzen $1, \dots, 10$

rein zufällig 4 auswählt, auf die man die 4 Einsen setzt.

Damit folgt:

$\mathbf{P}(Z_i \neq Z_{i+1} | K = 4) = 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}$ (warum?),

also ist der gesuchte Wert gleich $1 + 9 \cdot 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{29}{5}$.

Ist $S_2 = \mathbb{R}$, dann ergibt sich

für ein zufälliges Paar (X, Y) mit Werten in $S_1 \times S_2$

im diskreten Fall

$$\mathbf{E}[Y \mid X = a] = \sum_b b\, \mathbf{P}(Y = b \mid X = a),$$

und im Fall von Dichten (mit $S_1 = \mathbb{R}$):

$$\mathbf{E}[Y \mid X = a] = \int b\, \frac{f(a, b)}{f_1(a)}\, db.$$