# Vorlesung 9a

# Bedingte Verteilung, bedingte Wahrscheinlichkeiten

## Teil 3:

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten

(Buch S. 115-117)

**Definition.**

Seien $E_1$, $E_2$ Ereignisse. Dann ist die

*bedingte Wahrscheinlichkeit von $E_2$, gegeben $E_1$*,

definiert als

$$\mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1) := \frac{\mathbf{P}(E_2 \cap E_1)}{\mathbf{P}(E_1)}$$

... *die Wahrscheinlichkeit von $E_2$, wenn man schon weiß,*

*dass $E_1$ eingetreten ist.*

Dies passt in den Rahmen von Teil 1,
als Verteilungsgewicht $\mathbf{P}(I_{E_2} = 1 \,|\, I_{E_1} = 1)$
der bedingten Verteilung von $I_{E_2}$, gegeben $\{I_{E_1} = 1\}$.

Für zwei Ereignisse $E_1$, $E_2$ lautet dann die

Formel von Bayes:

$$\mathbf{P}(E_1|E_2) = \frac{\mathbf{P}(E_1)P(E_2|E_1)}{\mathbf{P}(E_1)P(E_2|E_1) + \mathbf{P}(E_1^c)P(E_2|E_1^c)}$$

**Beispiel:**

In einer Population haben $0.1\%$ eine bestimmte Krankheit.

Bei einer bestimmten Reihenuntersuchung wird

eine kranke Person in $100\%$ der Fälle positiv getestet,

eine gesunde Person in $1\%$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

eine positiv getestete Person wirklich krank ist?

Hier ist erst einmal ein Rezept

für eine intuitive Überschlagsrechnung:

In einer Population von 1000

sind 999 gesund und einer krank. Von den 999 Gesunden

werden ca 10 (falsch) positiv diagnostiziert.

Von 11 positiv Diagnostizierten

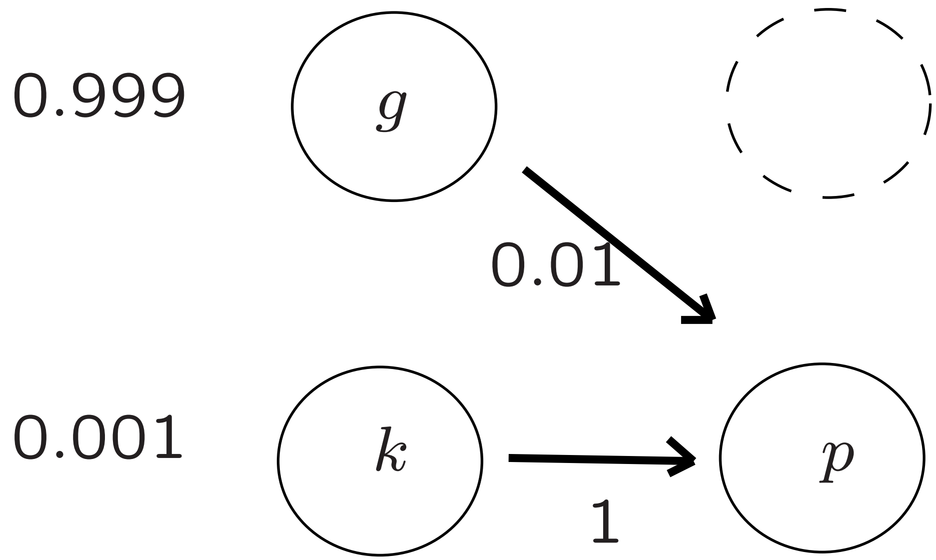
ist also im Schnitt nur einer krank.

Hier ist eine **Formalisierung:**

$X_1$ sei der Gesundheitszustand (mit Werten in $S_1 = \{g, k\}$),

$X_2$ der Testbefund (mit Werten in $S_2 = \{p, n\}$).

$(X_1, X_2)$ entsteht über ein zweistufiges Experiment:




$$\mathbf{P}(X_1 = k \,|\, X_2 = p) = \frac{\mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = p)}{\mathbf{P}(X_2 = p)}$$

$$= \frac{0.001 \cdot 1}{0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 1} \approx \frac{1}{11}$$