Vorlesung 9a

Bedingte Verteilung, bedingte Wahrscheinlichkeiten

Teil 1:

Bedingte Verteilung

(Buch S. 111)

Bisher legten wir das Hauptaugenmerk auf den

Aufbau der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

aus der Verteilung ρ von X_1

und Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) := \rho(a_1)P(a_1, a_2)$$

Jetzt gewinnen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten als

bedingte Verteilung von X_2 gegeben X_1 zurück,

und zwar durch

Zerlegung der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

nach der Verteilung von X_1.

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Zielbereich S_1

und X_2 eine Zufallsvariable mit Zielbereich S_2.

Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von $\{X_2 \in A_2\}$,

gegeben $\{X_1 = a_1\}$

definiert als

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1) := \frac{\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2)}{\mathbf{P}(X_1 = a_1)}$$

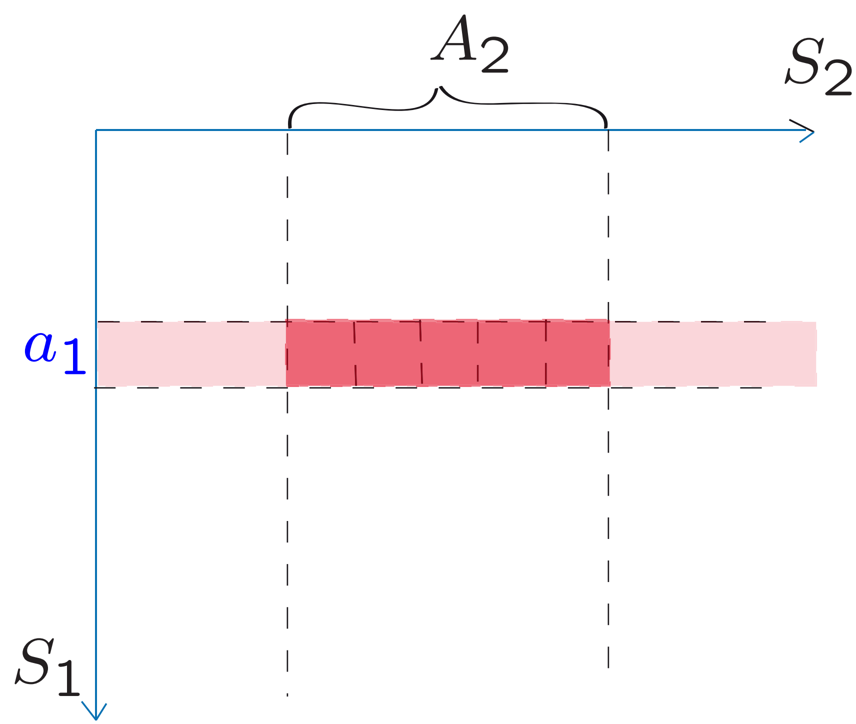
$$= \frac{\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2)}{\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in S_2)} \, .$$

In der Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte

$$\nu(a_1, a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

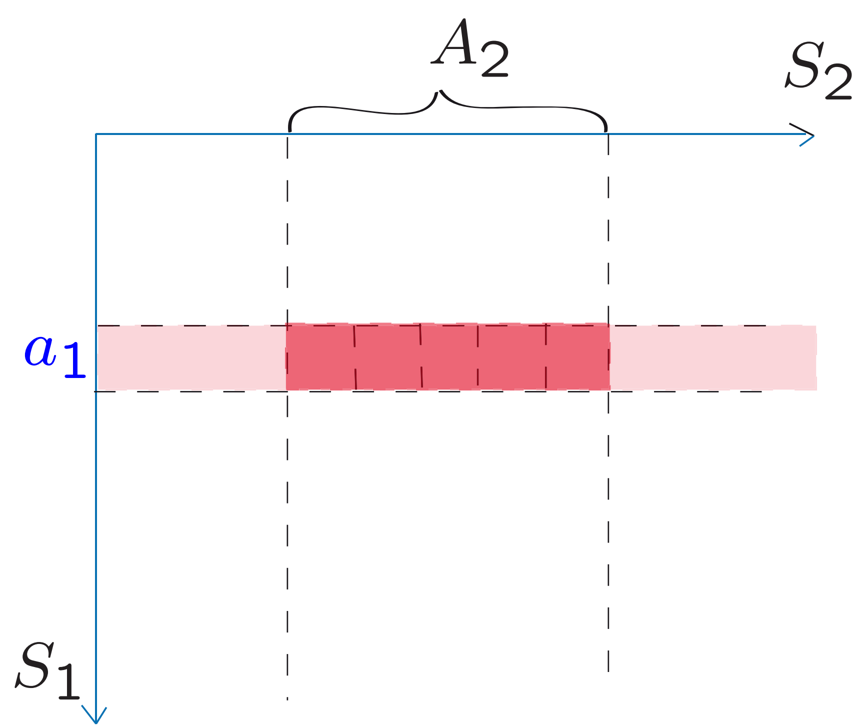
ist $\mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1)$ das relative Gewicht von A_2

bezogen auf das Gesamtgewicht der Zeile a_1



Die Verteilung $\mathbf{P}(X_2 \in \cdot \,|\, X_1 = a_1)$

heißt die *bedingte Verteilung von X_2, gegeben* $\{X_1 = a_1\}$.



Im nächsten Beispiel betrachten wir

die bedingte Verteilung einer ZV'en unter einem Ereignis.

Sei T eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable, $k \in \mathbb{N}$.

Wir fragen nach der

unter dem Ereignis $E := \{T > k\}$ bedingten

Verteilung der verbleibenden Wartezeit $X_2 := T - k$

und setzen

$$\mathbf{P}(X_2 = \ell | E) := \mathbf{P}(X_2 = \ell | I_E = 1), \quad \ell = 1, 2, \ldots.$$

Bedingte Verteilung der verbleibenden Wartezeit:

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

(Buch S. 116)

T sei Geom(p)-verteilt. Dann gilt

$$\mathbf{P}(T > k + \ell \,|\, T > k) = q^{k+\ell}/q^k = q^\ell \,.$$

Die bedingte Verteilung von $T - k$, gegeben $\{T > k\}$, ist somit gleich Geom(p).

Die Kenntnis, dass T einen Wert größer als k annimmt, ändert also die Verteilung der verbleibenden Wartezeit nicht.

Bedingte Verteilung der verbleibenden Wartezeit: Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

Für exponentialverteiltes T zum Parameter λ gilt für $r, s > 0$

$$\mathbf{P}(T > r + s \,|\, T > r) = e^{-\lambda s} \ .$$

Die bedingte Verteilung von $T - r$, gegeben $\{T > r\}$, ist somit gleich Exp(λ).

Die Kenntnis, dass T einen Wert größer als r annimmt, ändert also die Verteilung der verbleibenden Wartezeit nicht.