Vorlesung 8b

Bedingte Erwartung und bedingte Varianz

Teil 4:

Zerlegung der Varianz

(Buch S. 90)

Wieder verwenden wir die Formel $(*)$ aus Teil 3:

$$(*) \qquad \mathbf{E}[(X_2 - h(X_1))^2]$$

$$= \mathbf{E}[\mathbf{Var}_{X_1}[X_2]] + \mathbf{E}[(\mathbf{E}_{X_1}[X_2] - h(X_1))^2].$$

Jetzt setzen wir

$$h(a_1) := \mathbf{E}[X_2], \quad a_1 \in S_1.$$

Dann wird $(*)$ zu

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[(X_2 - \mathbf{E}[X_2])^2] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{Var}_{X_1}[X_2]] + \mathbf{E}[(\mathbf{E}_{X_1}[X_2] - \mathbf{E}[X_2])^2] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{Var}_{X_1}[X_2]] + \mathbf{E}[(\mathbf{E}_{X_1}[X_2] - \mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]])^2] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{Var}_{X_1}[X_2]] + \mathbf{Var}\big[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]\big].
\end{aligned}$$

Insgesamt wird dann die Formel $(*)$ zu

$$\boxed{\mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{E}\big[\mathbf{Var}_{X_1}[X_2]\big] + \mathbf{Var}\big[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]\big]}$$

Das ist die **Zerlegung der Varianz** von X_2 nach X_1.

$$\mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{E}\Big[\mathbf{Var}_{X_1}[X_2]\Big] + \mathbf{Var}\Big[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]\Big]$$

Zum Merken:

Die Varianz von X_2

ist die Summe aus dem

Erwartungswert der bedingten Varianzen

und der Varianz der bedingten Erwartungswerte

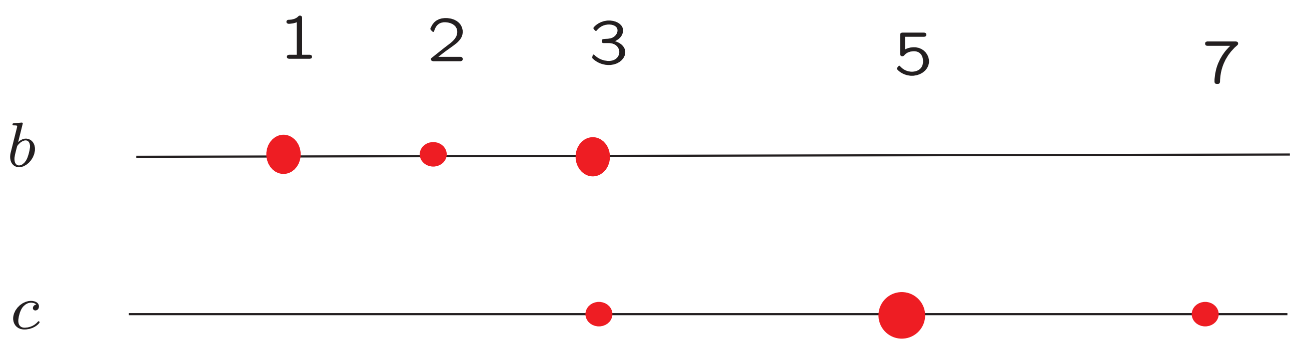
(Variabilität innerhalb der Zeilen

plus Variabilität zwischen den Zeilen).

Wir illustrieren dies mit einem kleinen Besipiel:

Die Übergangsmatrix P sei

	1	2	3	5	7
b	0.4	0.2	0.4	0	0
c	0	0	0.2	0.6	0.2



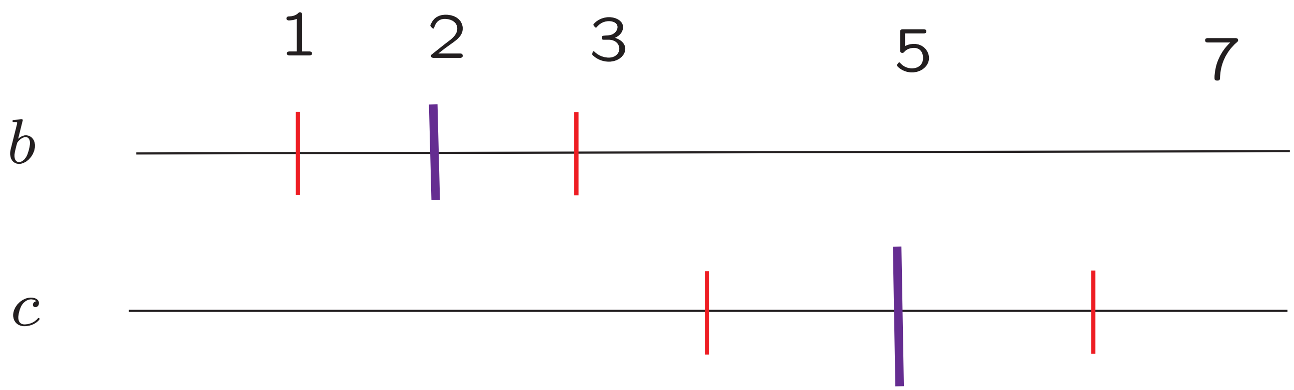
Dann gilt:

$\mathbf{E}_b[X_2] = 2, \quad \mathbf{E}_c[X_2] = 5,$

$\mathbf{Var}_b[X_2] = 0.8 \cdot 1^2 = 0.8, \mathbf{Var}_c[X_2] = 0.4 \cdot 2^2 = 1.6.$

$\mathbf{E}_b[X_2] = 2$, $\mathbf{E}_c[X_2] = 5$,

$\mathbf{Var}_b[X_2] = 0.8$, $\mathbf{Var}_c[X_2] = 1.6$.



Die Startgewichte seien $\rho(b) = 0.3$, $\rho(c) = 0.7$. Damit:

- Erwartungswert der bedingten Varianzen: $0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 1.6$

- Varianz der bedingten Erwartung: $0.3 \cdot 0.7 \cdot (5 - 2)^2$

(siehe dazu die nächste Folie)

Deren Summe ist $\mathbf{Var}[X_2] = 3.25$.

Wir erklären noch das Ergebnis

$$\mathbf{Var}[e(X_1)] = 0.3 \cdot 0.7 \cdot (5-2)^2$$

für $e(X_1) := \mathbf{E}_{X_1}[X_2]$

aus der vorigen Folie.

$e(X_1)$ ist hier eine binäre Zufallsvariable

und hat dieselbe Verteilung wie $2 + Z(5-2)$,

wobei Z ein Münzwurf mit $p = 0.7$ ist ...

Beispiel: Summe aus einer zufälligen Anzahl unabhängiger Summanden.

$$Y := \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

mit $Z_1, Z_2, \ldots$ unabhängig, identisch verteilt

und unabhängig von N.

$$\mu := \mathbf{E}[Z_1],\ \sigma^2 := \mathbf{Var}[Z_1]$$

Aufgabe: Berechne $\mathbf{E}[Y]$ und $\mathbf{Var}[Y]$ aus

$\mathbf{E}[N]$, $\mathbf{Var}[N]$, μ und σ^2.

$$Y = \sum_{i=1}^{N} Z_i, \quad \mu := \mathbf{E}[Z_1],\ \sigma^2 := \mathbf{Var}[Z_1].$$

Wir nehmen N als erste und Y als zweite Stufe:

$$\mathbf{E}_n[Y] = n\mu\ , \quad \mathbf{Var}_n[Y] = n\sigma^2\ .$$

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\mathbf{E}_N[Y]] = \mathbf{E}[N\mu] = \mathbf{E}[N] \cdot \mu.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[Y] &= \mathbf{E}\big[\mathbf{Var}_N[Y]\big] + \mathbf{Var}\big[\mathbf{E}_N[Y]\big] \\ &= \mathbf{E}[N] \cdot \sigma^2 + \mathbf{Var}[N] \cdot \mu^2.\end{aligned}$$