Vorlesung 8b

Bedingte Erwartung und bedingte Varianz

Teil 1:

Bedingte Erwartung

(Buch S. 91)

Wie in der vorigen Vorlesung betrachten wir die

gemeinsame Verteilung von zwei Zufallsvariablen X_1, X_2,

aufgebaut aus der Verteilung von X_1

und den Übergangsverteilungen:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$\nu(a_1, a_2) = \rho(a_1)P(a_1, a_2)$$

Auch der Erwartungswert

einer reellwertigen Zufallsvariablen $g(X_1, X_2)$

kann nach der ersten Stufe zerlegt werden.

Sei $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Zufallsvariable $h(X_1, X_2)$.

Für $a_1 \in S_1$ setzen wir

$$\mathbf{E}_{a_1}\big[g(X_1, X_2)\big] := \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

und nennen diese Zahl den

bedingten Erwartungswert von $g(X_1, X_2)$,

gegeben $\{X_1 = a_1\}$.

Merke:

Der bedingte Erwartungswert

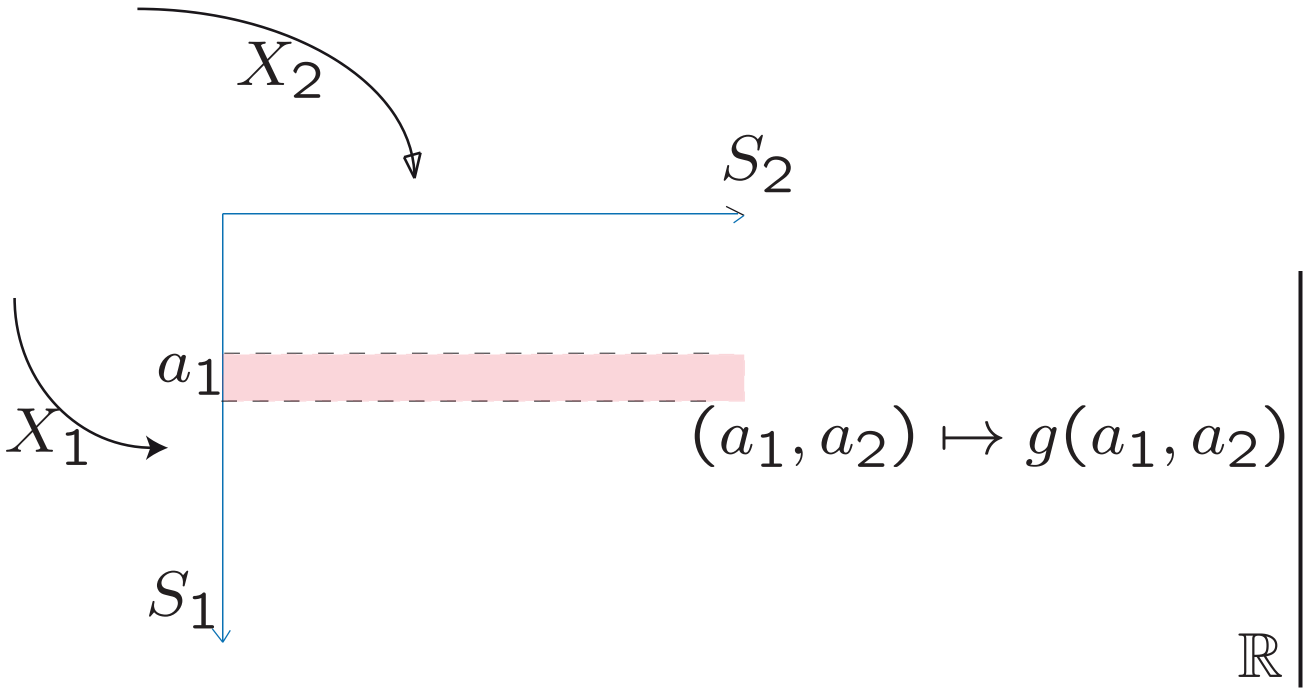
$$\mathbf{E}_{a_1}\big[g(X_1, X_2)\big]$$

wird gebildet mit der Übergangsverteilung $P(a_1, .)$,

also mit den Wahrscheinlichkeitsgewichten,

die die Zeile $P(a_1, .)$ der Matrix P bilden:

$$\mathbf{E}_{a_1}\big[g(X_1, X_2)\big] = \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2) P(a_1, a_2)$$


X_2
S_2
a_1
X_1
$(a_1, a_2) \mapsto g(a_1, a_2)$
S_1
$\mathbb{R}$

Ähnlich wie die Verteilungsgewichte von (X_1, X_2) lässt sich auch der Erwartungswert $\mathbf{E}[g(X_1, X_2)]$ nach den Ausgängen von X_1 zerlegen.

(Zerlegung des Erwartungswerts nach der ersten Stufe)

$$\mathbf{E}\Big[g(X_1, X_2)\Big]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}\big[g(X_1, X_2)\big]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} g(a_1, a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{E}_{a_1}\big[g(X_1, X_2)\big]$$

$$= \mathbf{E}\big[\mathbf{E}_{X_1}[g(X_1, X_2)]\big].$$

$$\boxed{\mathbf{E}\big[g(X_1, X_2)\big] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}_{X_1}[g(X_1, X_2)]\big]}$$

“Zerlegung des Erwartungswertes nach der ersten Stufe”

Merke: Der bedingte Erwartungswert

$$\mathbf{E}_{a_1}\left[g(X_1, X_2)\right]$$

ist eine Zahl,

und läst sich auffassen als Prognosewert für $g(X_1, X_2)$

gegeben $\{X_1 = a_1\}$

$$\mathbf{E}_{X_1}\left[g(X_1, X_2)\right]$$

ist eine Zufallsvariable,

sie "erbt den Zufall" von X_1.

Wir nennen diese Zufallsvariable die

bedingte Erwartung von $g(X_1, X_2)$ gegeben X_1.

$$\mathbf{E}\Big[g(X_1, X_2)\Big] = \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}_{X_1}[g(X_1, X_2)]\Big]$$

Ist X_2 reellwertig (also $S_2 \subset \mathbb{R}$),

dann ergibt sich als Spezialfall (mit $g(a_1, a_2) := a_2$)

$$\mathbf{E}_{a_1}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ ,$$

Wir haben dann die einprägsame Formel

$$\boxed{\mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]]}$$

(Zerlegung des Erwartungswertes von X_2 nach X_1.)