Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 4:

Addieren von unabhängigen Zufallsvariablen

– zweistufig aufgefasst.

Y und Z seien unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable.

Wie ist $Y + Z$ verteit?

Wir können $Y + Z$ auffassen als zweite Stufe eines Zufallsexperiments.

Die erste Stufe ist Y.

Gegeben $\{Y = a\}$ ist

$$X_2 := Y + Z$$

so verteilt wie $a + Z$.

Der diskrete Fall:

Y und Z seien unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable.

$$\mathbf{P}(Y = a, Y + Z = b) = \mathbf{P}(Y = a,\ a + Z = b)$$
$$= \mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(a + Z = b)$$

Wir sehen hier die Produktformel wieder!

Summation über a ergibt die “totale Wahrscheinlichkeit”:

$$\mathbf{P}(Y + Z = b) = \sum_a \mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a)$$

(Zerlegung von $\mathbf{P}(Y + Z = b)$ nach den Ausgängen von Y,

“Zerlegung nach dem ersten Schritt”)

$$\mathbf{P}(Y + Z = b) = \sum_a \mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a)$$

Beispiel:

Y, Z unabhängig und Geom(p)-verteilt

$$\mathbf{P}(Y + Z = b) = \sum_{a=1}^{b-1} pq^{a-1} pq^{b-a-1}$$

$$= (b-1)p^2 q^{b-2}, \quad b = 2, 3, \ldots$$

Dies sind die Gewichte der sogenannten

negativen Binomialverteilung mit Parametern 2, p

Diese ist die Verteilung der Anzahl der Versuche

in einem p-Münzwurf bis einschließlich zum zweiten Erfolg.

Der Fall mit Dichten (Buch S. 92)

Im diskreten Fall hatten wir

$$\mathbf{P}(Y = a, Y + Z = b) = \mathbf{P}(Y = a, a + Z = b)$$

$$= \mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(a + Z = b)$$

Haben jetzt Y und Z die Dichten $f(y)\,dy$ und $g(z)\,dz$,

so bekommt man analog

die gemeinsame Dichte von $(Y, Y + Z)$:

$$\mathbf{P}(Y \in da, Y + Z \in db) = \mathbf{P}(Y \in da, a + Z \in db)$$

$$= \mathbf{P}(Y \in da)\,\mathbf{P}(a + Z \in db)$$

$$= f(a)da\;\, g(b - a)\,db$$

$$\boxed{\mathbf{P}(Y \in da, Y + Z \in db) = f(a)\ g(b-a)\ da\, db}$$

Integration über a gibt die Dichte von $Y + Z$:

$$\mathbf{P}(Y + Z \in db) = \left(\int f(a)\, g(b-a)\ da\right) db\ .$$

Beispiel: Für Y und Z unabhängig und Exp(1)-verteilt ist

$$\mathbf{P}(Y + Z \in db) = \left(\int_0^b e^{-a} e^{-(b-a)}\ da\right) db$$
$$= b e^{-b}\, db, \quad b \geq 0.$$

(Dichte der Gamma(2)-Verteilung)