Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 2:

Die wichtigen Drei

(Startverteilung, Übergangswahrscheinlichkeiten

und gemeinsame Verteilung)

und die Multiplikationsformel

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2.

Damit ist hier gemeint, dass $P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, Verteilungsgewichte auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, .)$.

Schreibweise:

$$P(a_1, a_2) =: \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \ .)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2

mit den Gewichten

$$\nu(a_1, a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

$$\nu(a_1, a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

kann man auch schreiben als

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Das ist die einfachste Variante der sogenannten

Multiplikationsformel.

Später werden wir das Analogon für n
statt 2 Zufallsvariable kennenlernen.

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\,.$$

Wir bemerken: Genau dann

hängen die Verteilungen $\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot)$ nicht von a_1 ab,

wenn X_1 und X_2 unabhängig sind.

$$\nu(a_1, a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

$$P(a_1, a_2),\ a_1 \in S_1,\ a_2 \in S_2$$

sind die Einträge der sogenannten

Übergangsmatrix P.

Jede einzelne Zeilensumme von P ist 1.

Die Zeilensummen der Matrix $\nu(.,.)$

ergeben die Einträge $\rho(.)$.

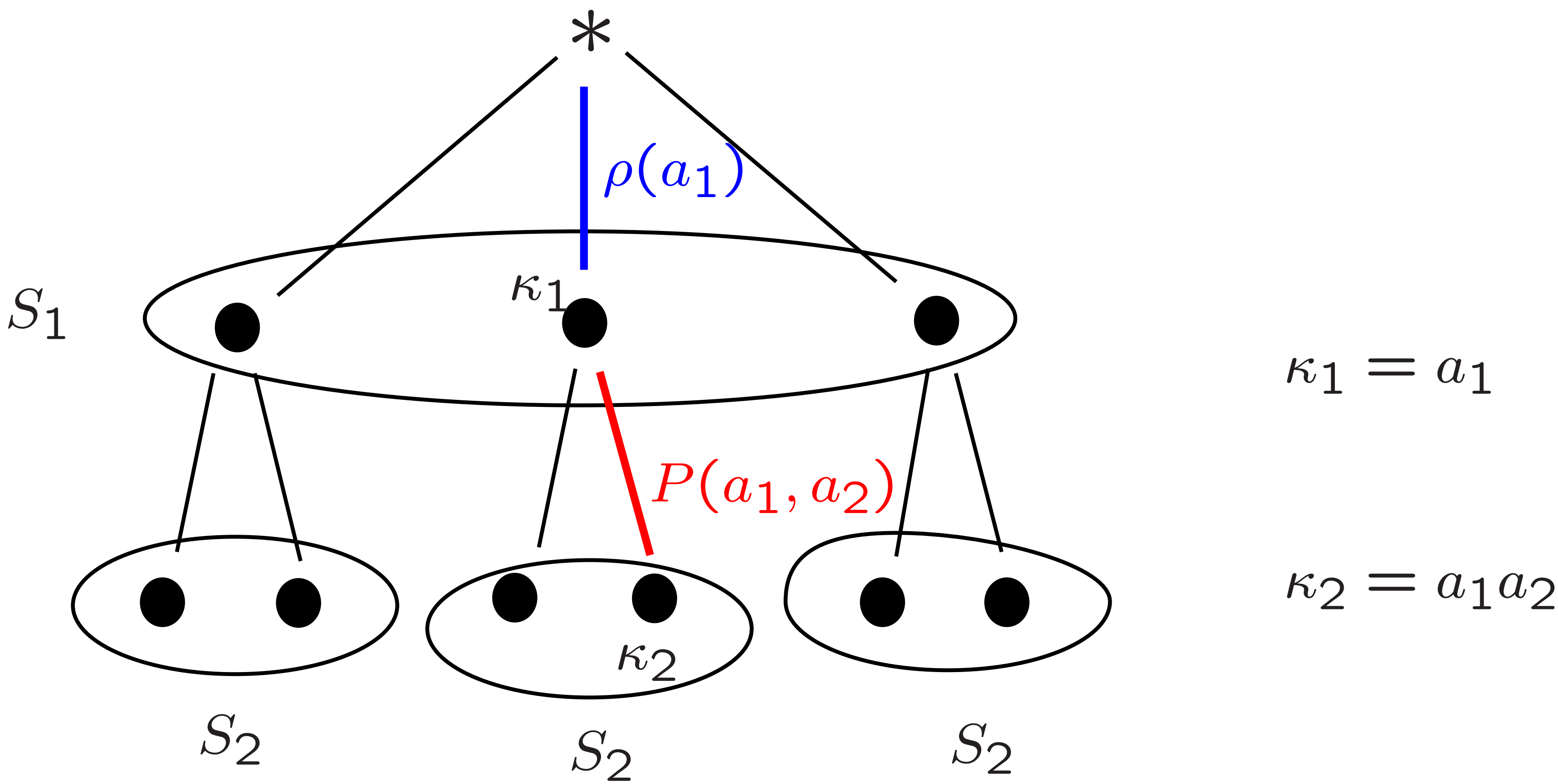
Die Gesamtsumme aller $\nu(a_1, a_2)$ ist 1.

Veranschaulichung durch einen Baum

Ein zweistufiges Zufallsexperiment

kann in seiner Abfolge

durch einen *Baum der Tiefe* 2 veranschaulicht werden:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2) \,.$$

(Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von $*$ zum Knoten κ_2)