

Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 1:

Übergangswahrscheinlichkeiten

Stellen wir uns ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ vor,
das auf zweistufige Weise zustande kommt:

es gibt eine Regel, die besagt, wie X_2 verteilt ist,
gegeben dass X_1 den Ausgang a_1 hat.

Ein erstes Beispiel:

In Stufe 1 entscheiden wir uns
mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel
und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:
dieser hat drei Seiten mit 5, drei mit 6 beschriftet.
 X_2 := die dann (in Stufe 2) geworfene Augenzahl.

$$\mathbf{P}(X_2 = 6) = ?$$

Wenn in Stufe 1 der **faire** Würfel gewählt wird,
dann sind die Verteilungsgewichte von X_2

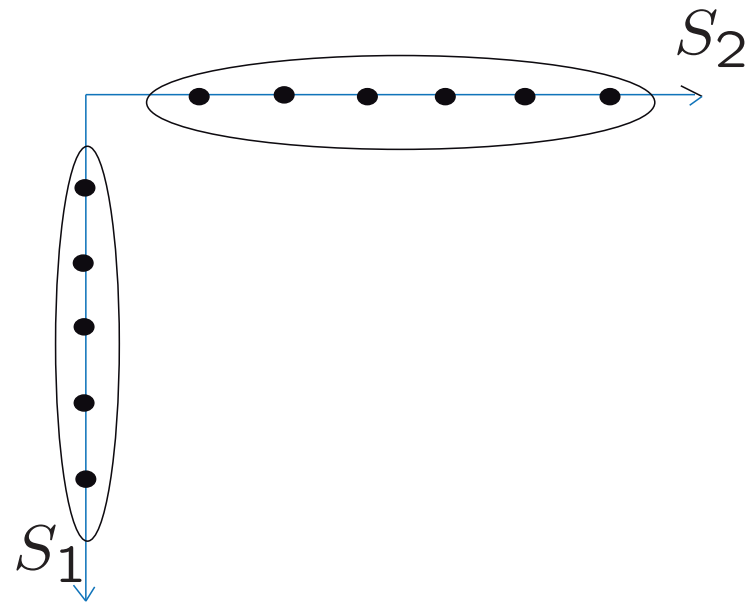
$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$$

Wenn in Stufe 1 der **gezinkte** Würfel gewählt wird,
dann sind die Verteilungsgewichte von X_2

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$P(X_2 = 6) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

Ein allgemeiner Rahmen.

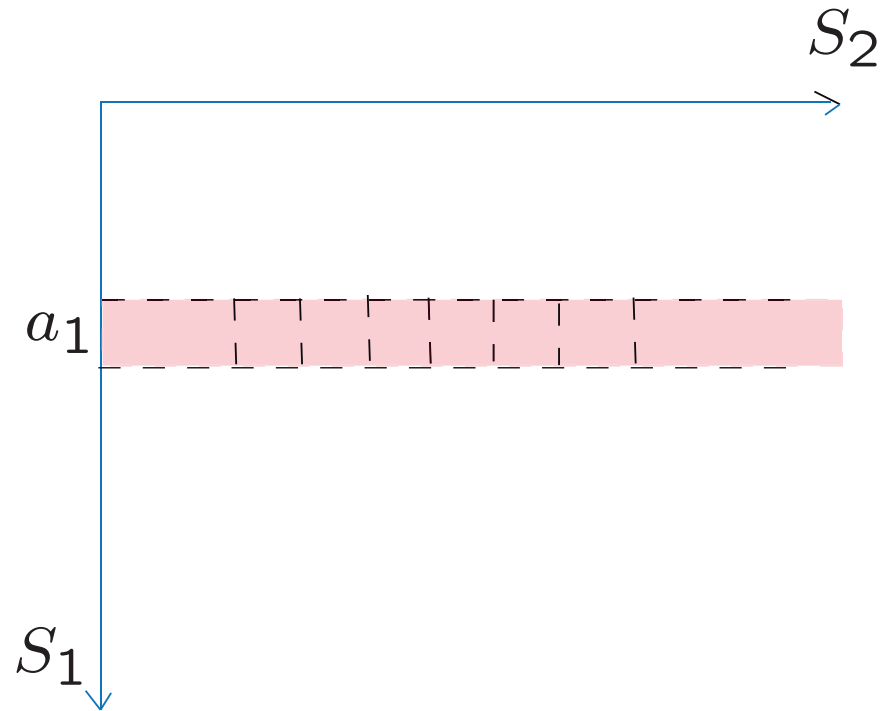


S_1 und S_2 seien (fürs Erste) diskrete Mengen.

Stellen wir uns vor: **Wenn** in Stufe 1

die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,

dann landet man in der mit a_1 bezeichneten Zeile.

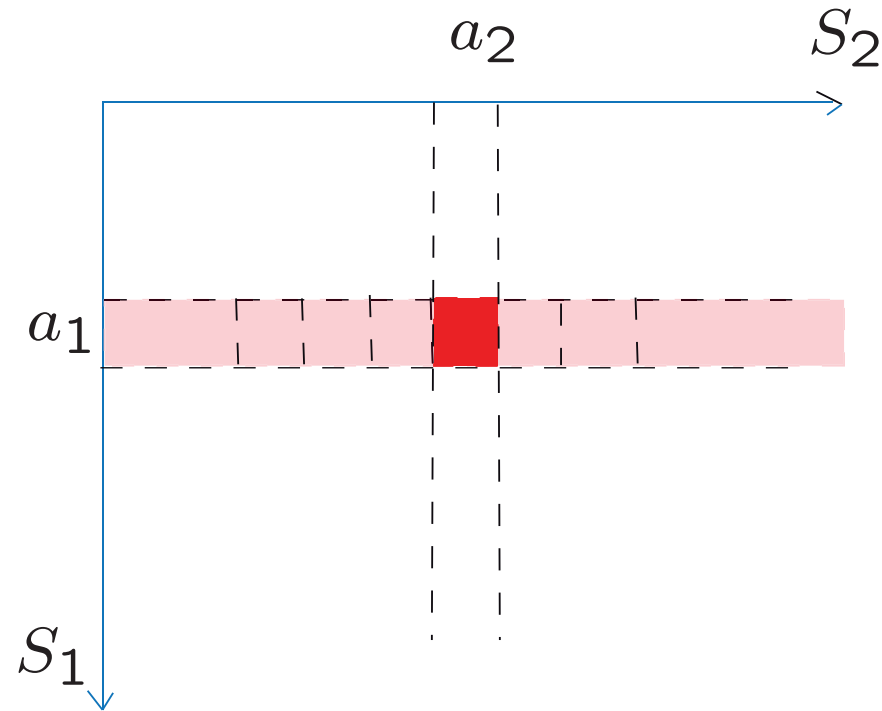


S_1 und S_2 seien (fürs erste) endliche Mengen.

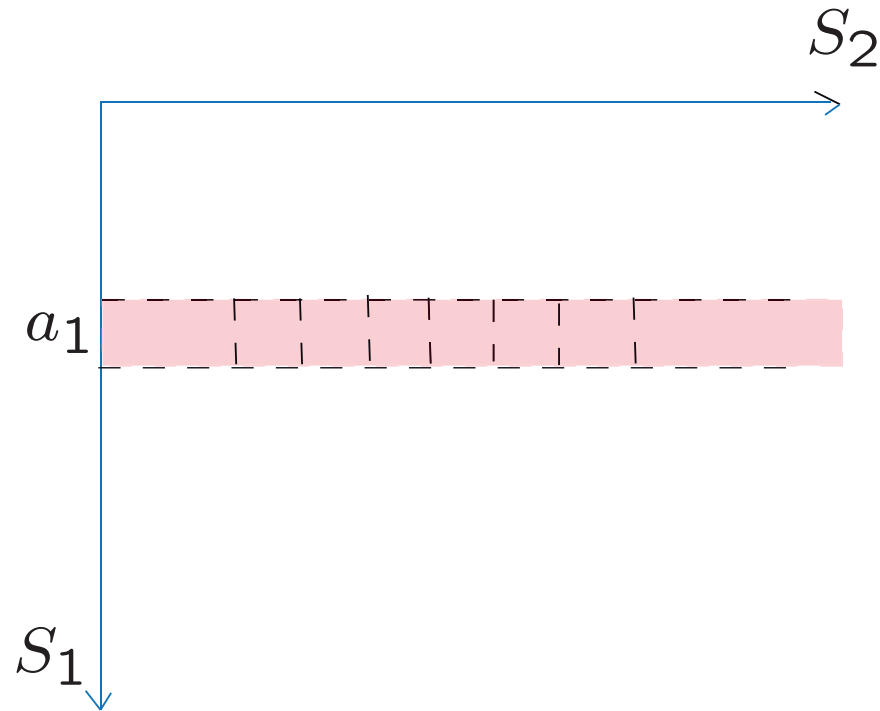
Stellen wir uns vor: **Wenn** in Stufe 1

die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,

dann landet man in der mit a_1 bezeichneten **Zeile**.



Wenn **dann** in Stufe 2
die Wahl auf das Element $a_2 \in S_2$ fällt,
landet man in dem mit (a_1, a_2) bezeichneten **Feld**
(Zeile a_1 , Spalte a_2)

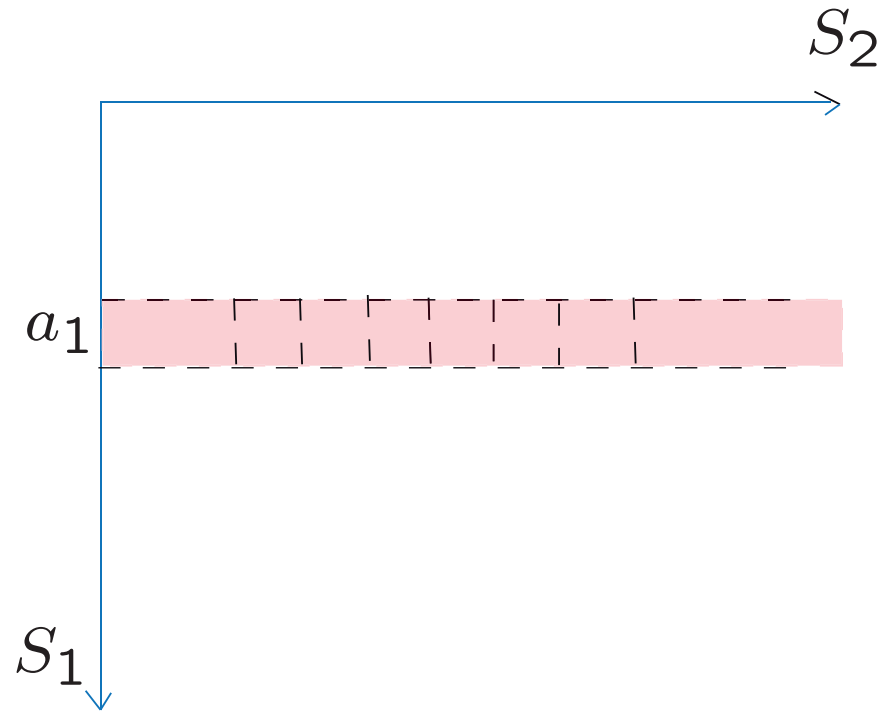


Jetzt bringen wir Wahrscheinlichkeiten ins Spiel.

Sei X_1 eine S_1 -wertige Zufallsvariable mit **Verteilung** ρ .

Mit Wahrscheinlichkeit $\rho(a_1)$ fällt X_1 auf a_1

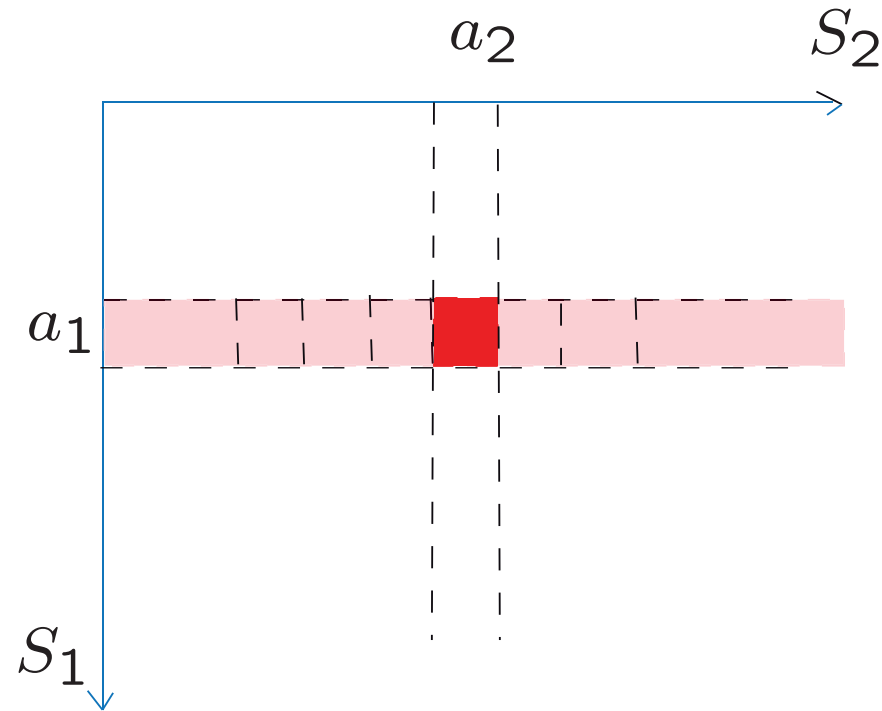
.... und landet man damit in Stufe 1 in Zeile a_1 .



Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2

Das heißt im hier betrachteten diskreten Fall:

$P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, sind Verteilungsgewichte auf S_2 ,
also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

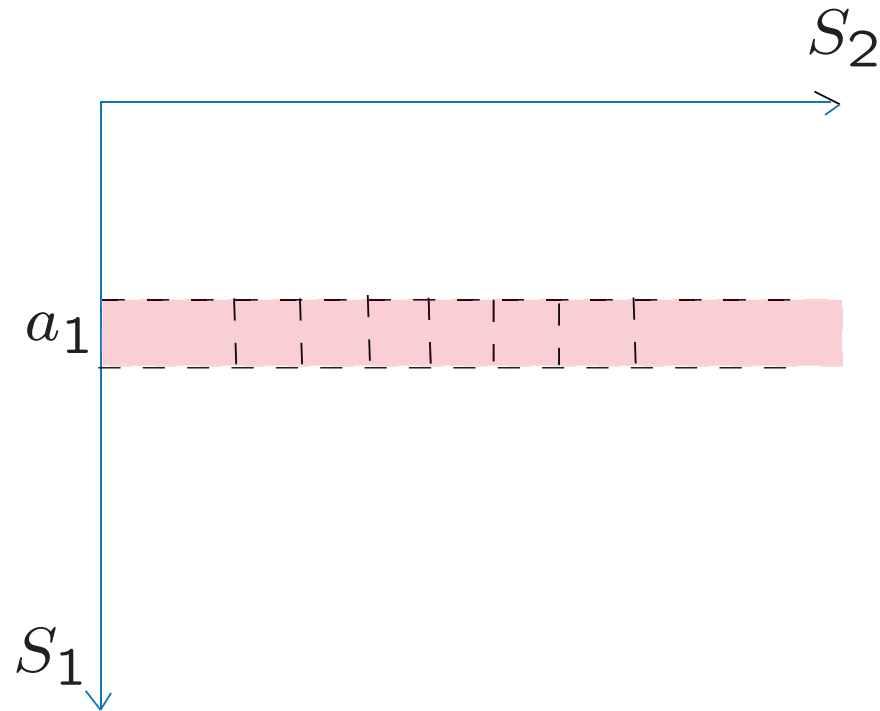


Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2 .

Vorstellung:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat das Ereignis $\{X_2 = a_2\}$ die W'keit $P(a_1, a_2)$.

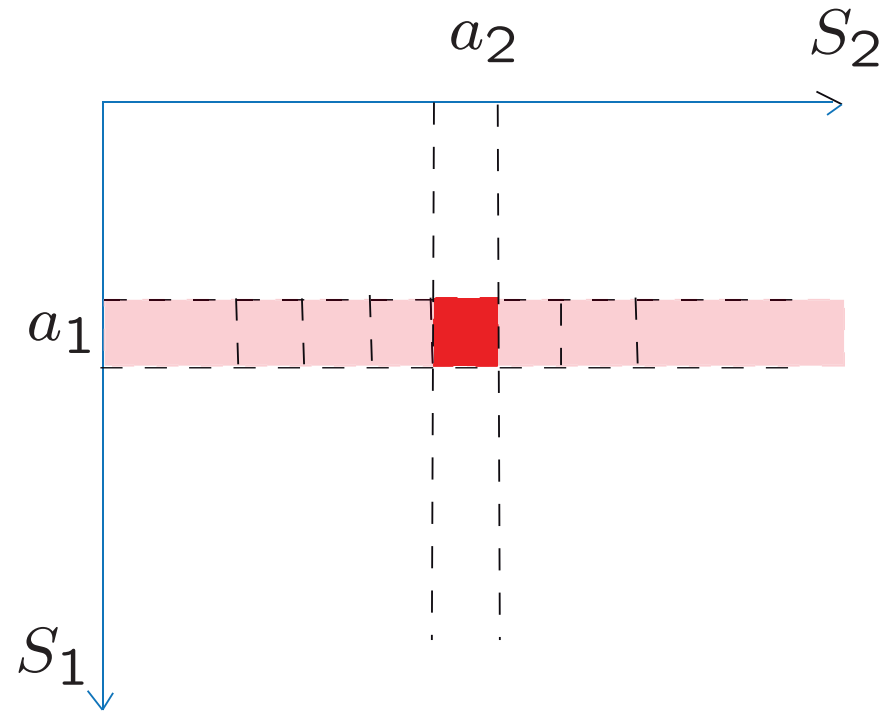


Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2

Anders gesagt:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, \cdot)$.



Das Gewicht $\rho(a_1)$ aus Stufe 1
 wird in Stufe 2 gemäß $P(a_1, \cdot)$
 auf die Zeile a_1 aufgeteilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)P(a_1, a_2).$$

Noch zwei Beispiele:

In diesen wird die zweite Stufe
jeweils eine *unabhängige Verschiebung* sein:

Beispiel A:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

ist X_2 uniform verteilt auf $\{a_1 - 1, a_1 + 1\}$.

Beispiel B:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$ ist X_2 $N(a_1, 1)$ -verteilt.

Beispiel A:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1, 2, 3\}$ uniform verteilte Zahl X_1 .
In Stufe 2 verschieben wir das in Stufe 1 erzielte Ergebnis
mit W'keit $1/2$ um eins nach rechts
und mit W'kt $1/2$ um eins nach links.

Gegeben $\{X_1 = 3\}$, ist X_2 uniform verteilt auf $\{2, 4\}$.

$$\mathbf{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

Beispiel B:

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

In Stufe 2 wird dazu

eine unabhängige standard-normalverteilte ZV'e addiert:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat X_2 die Verteilung $N(a_1, 1)$.

(Dieses Beispiel weist über den diskreten Fall hinaus.)