

# Vorlesung 7b

## Korrelationskoeffizient und Regressionsgerade

### Teil 1

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für  $\mathbb{E}[XY]$

(Buch S. 56)

Wir erinnern an die Definition der  
**Kovarianz**

Für reellwertige Zufallsvariable  $X, Y$   
mit  $E[X^2] < \infty$  und  $E[Y^2] < \infty$  ist

$$\text{Cov}[X, Y] := E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Insbesondere ist also

$$\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$$

Die Kovarianz ist

- im Fall von zwei gleichen Einträgen nichtnegativ:

$$\text{Cov}[X, X] \geq 0$$

- in den beiden Einträgen symmetrisch:

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$$

- *bilinear*, d.h. in jedem einzelnen Eintrag linear:

$$\text{Cov}[c_1 X_1 + c_2 X_2, Y] = c_1 \text{Cov}[X_1, Y] + c_2 \text{Cov}[X_2, Y]$$

Wir beweisen jetzt die

Kovarianz-Varianz-Ungleichung:

$$|\text{Cov}[X, Y]| \leq \sqrt{\text{Var} X} \sqrt{\text{Var} Y}$$

Mit  $G := X - \mu_X$ ,  $H := Y - \mu_Y$

folgt die Behauptung aus der

**Cauchy-Schwarz Ungleichung:**

Für reellwertige Zufallsvariable  $G, H$  mit  $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] < \infty$   
ist

$$|\mathbf{E}[GH]| \leq \sqrt{\mathbf{E}[G^2]} \sqrt{\mathbf{E}[H^2]} .$$

Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung:

Fall 1:  $\mathbf{E}[G^2] > 0$  und  $\mathbf{E}[H^2] > 0$ .

$$U := G/\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}, \quad V := H/\sqrt{\mathbf{E}[H^2]} \quad \text{erfüllen} \\ \mathbf{E}[U^2] = \mathbf{E}[V^2] = 1.$$

$$\text{Aus } \pm 2UV \leq U^2 + V^2 \quad \text{folgt} \\ \pm \mathbf{E}[UV] \leq \frac{1}{2}(\mathbf{E}[U^2] + \mathbf{E}[V^2]) = 1, \\ \text{also}$$

$$\pm \frac{\mathbf{E}[GH]}{\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}} \leq 1.$$

Fall 2:  $\mathbf{E}[G^2] = 0$ .

Dann folgt aus dem  
Satz von der Positivität des Erwartungswertes

$$\mathbf{P}(G^2 = 0) = 1,$$

also

$$\mathbf{P}(GH = 0) = 1$$

und

$$\mathbf{E}[GH] = 0,$$

und damit wieder

$$\pm \mathbf{E}[GH] \leq \sqrt{\mathbf{E}[G^2]} \sqrt{\mathbf{E}[H^2]}. \quad \square$$