

Vorlesung 7a

Der zentrale Grenzwertsatz

Teil 4

Erlebnis:

Die genaue Form der Gaußschen Glockenkurve

Am Ende von Teil 3 hatten wir (für $n = 100$) betrachtet:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} ,$$

$$\text{mit } S_n := X_1 + \cdots + X_n,$$

$X_1, X_2, \dots$ unabhängig und uniform auf $[-0.5, 0.5]$.

Die Verteilung von Z_n war glockenförmig.

Was ist deren genaue Form für $n \rightarrow \infty$?

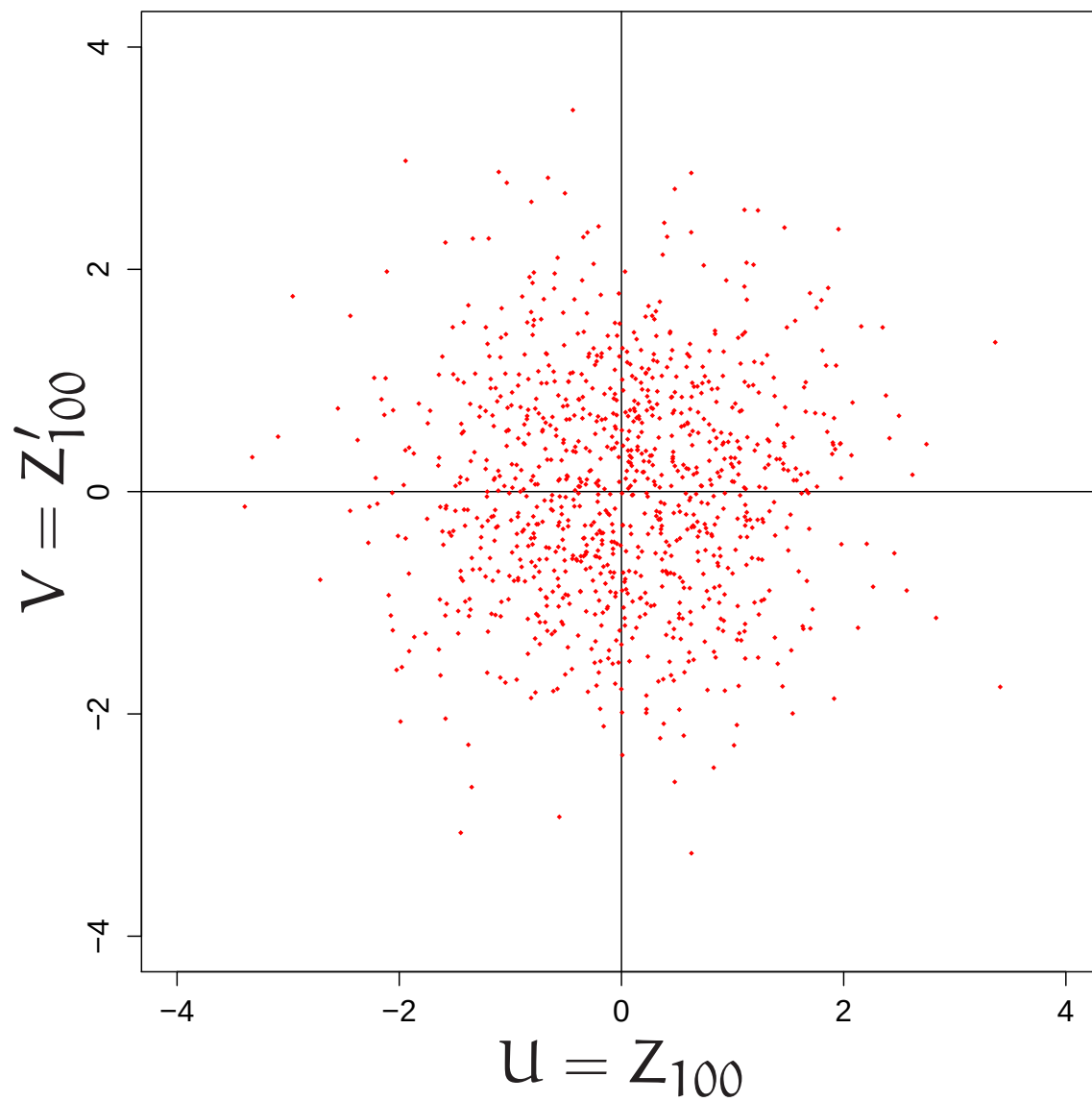
Glücklicher Einfall:

Nimm zwei unabhängige Kopien

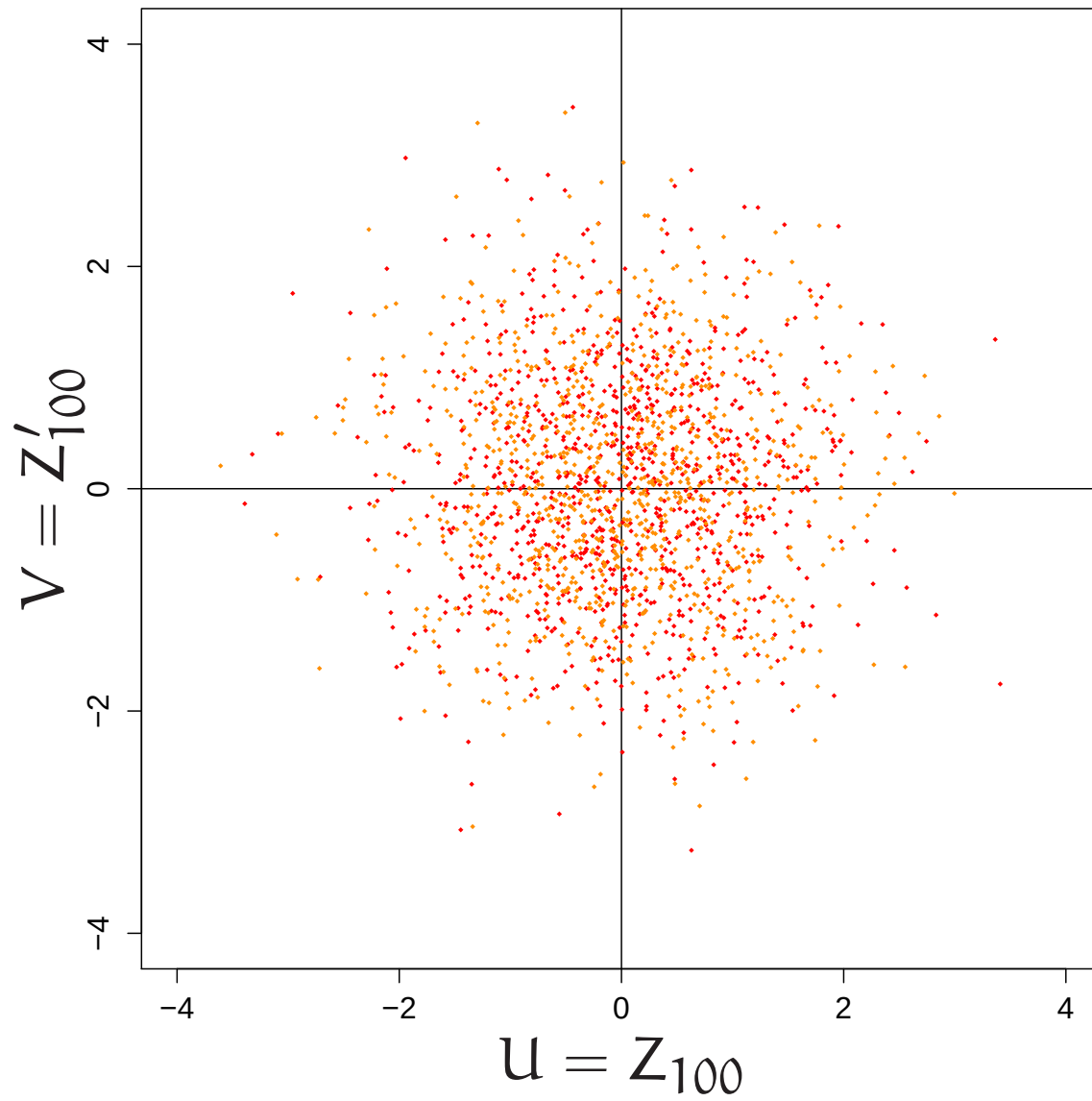
$$(U, V) := (Z_{100}, Z'_{100})$$

Wie sieht die gemeinsame Verteilung
von U und V aus?

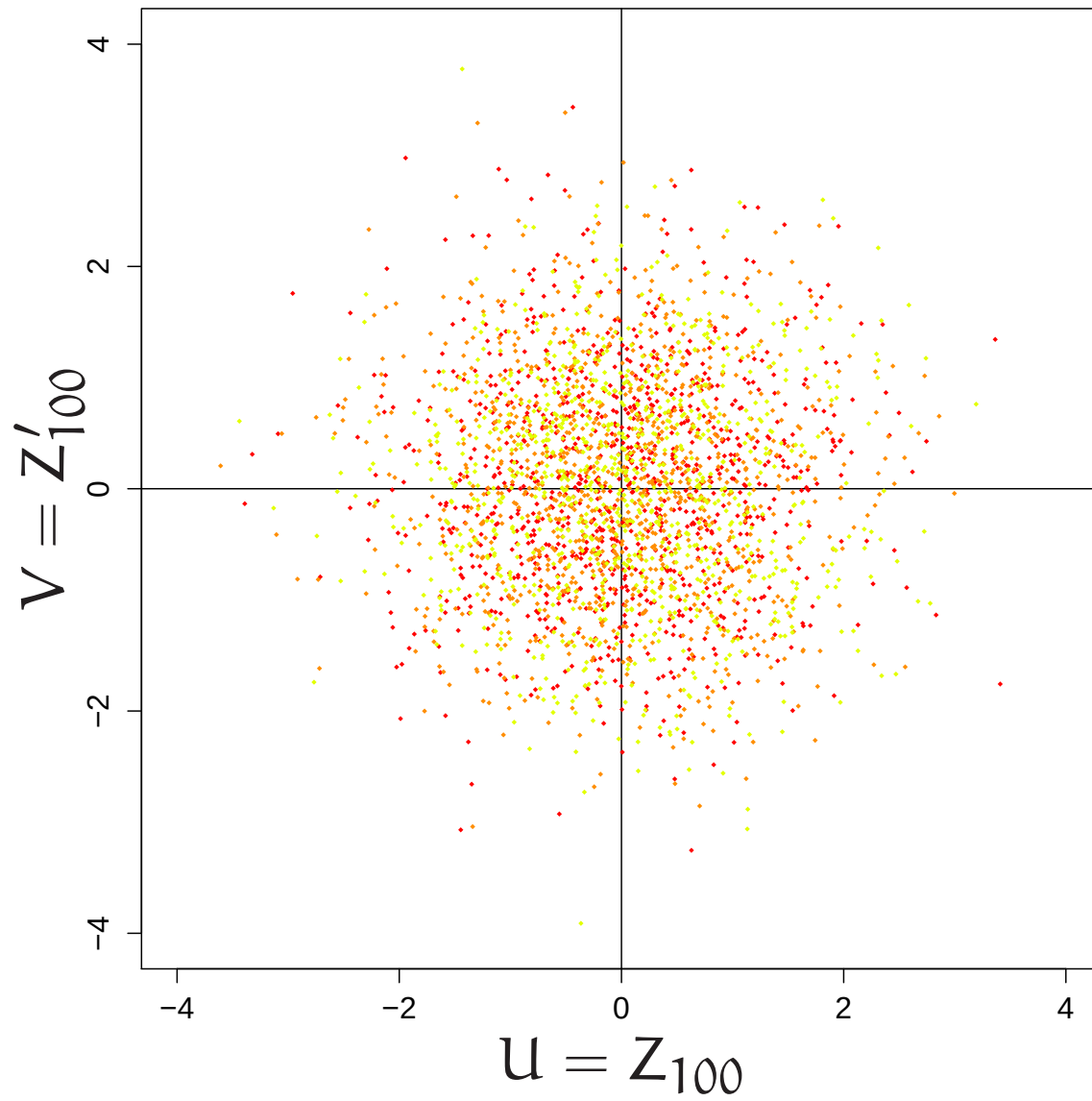
1000 Simulationen



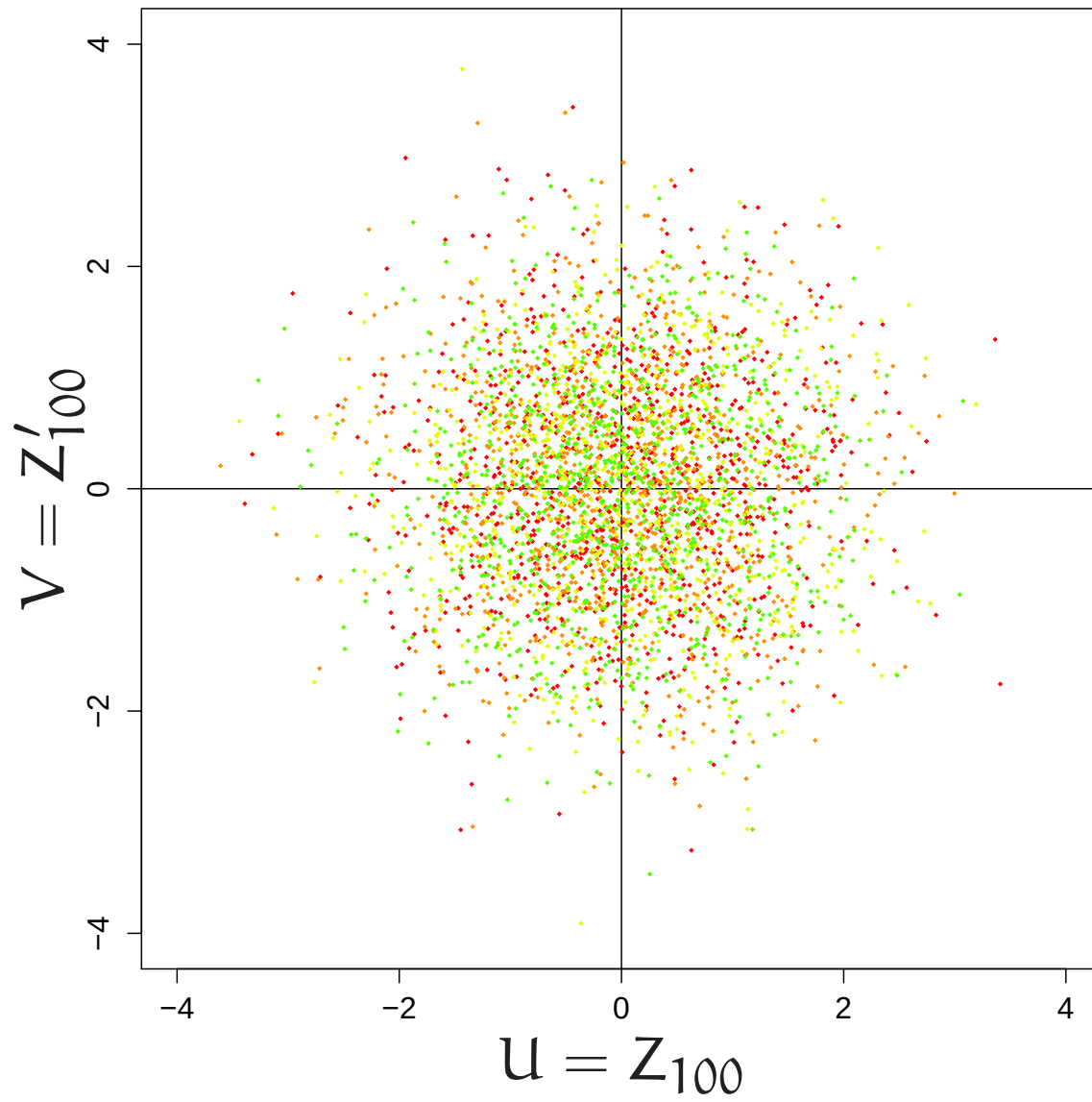
2000 Simulationen



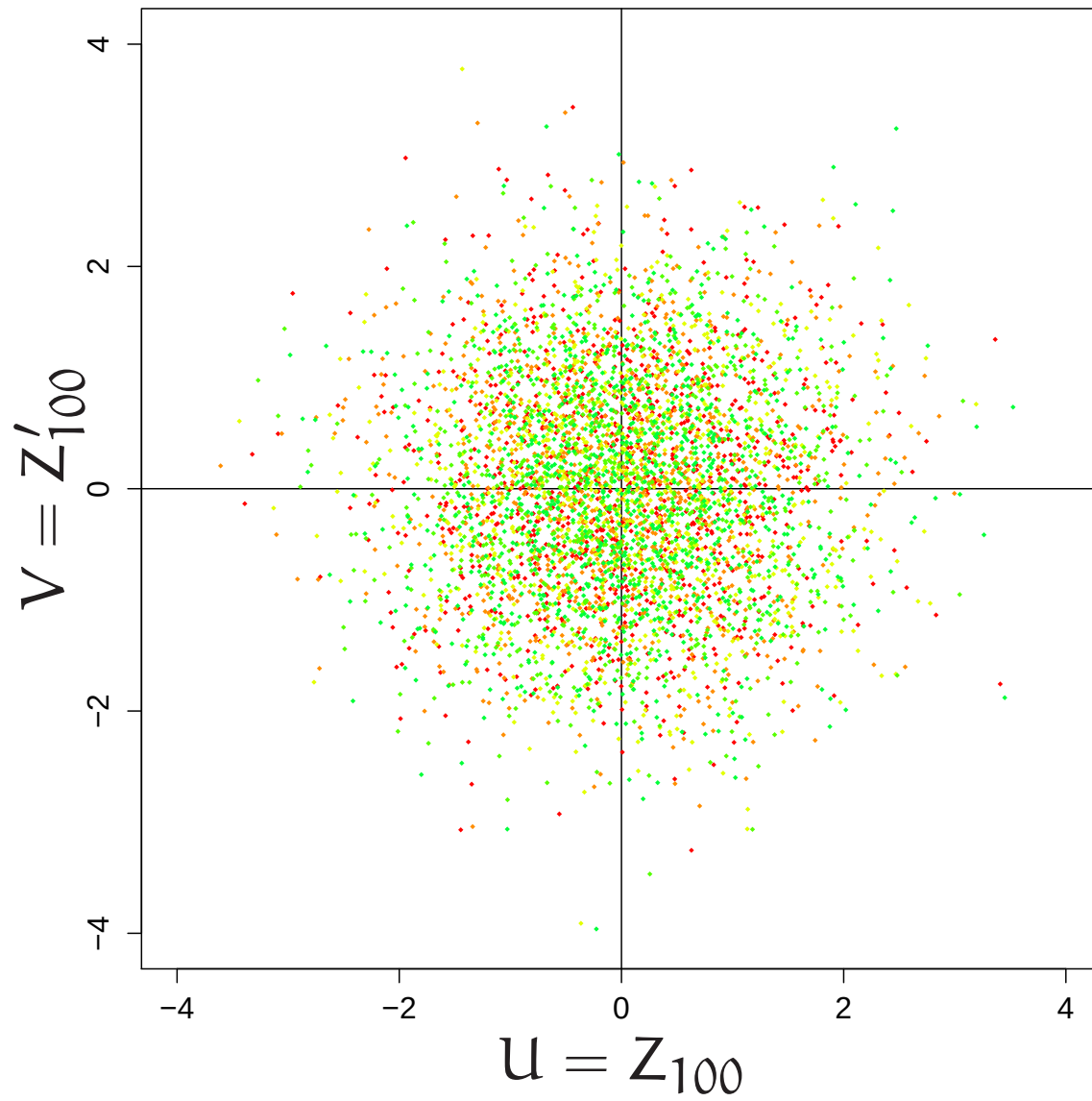
3000 Simulationen



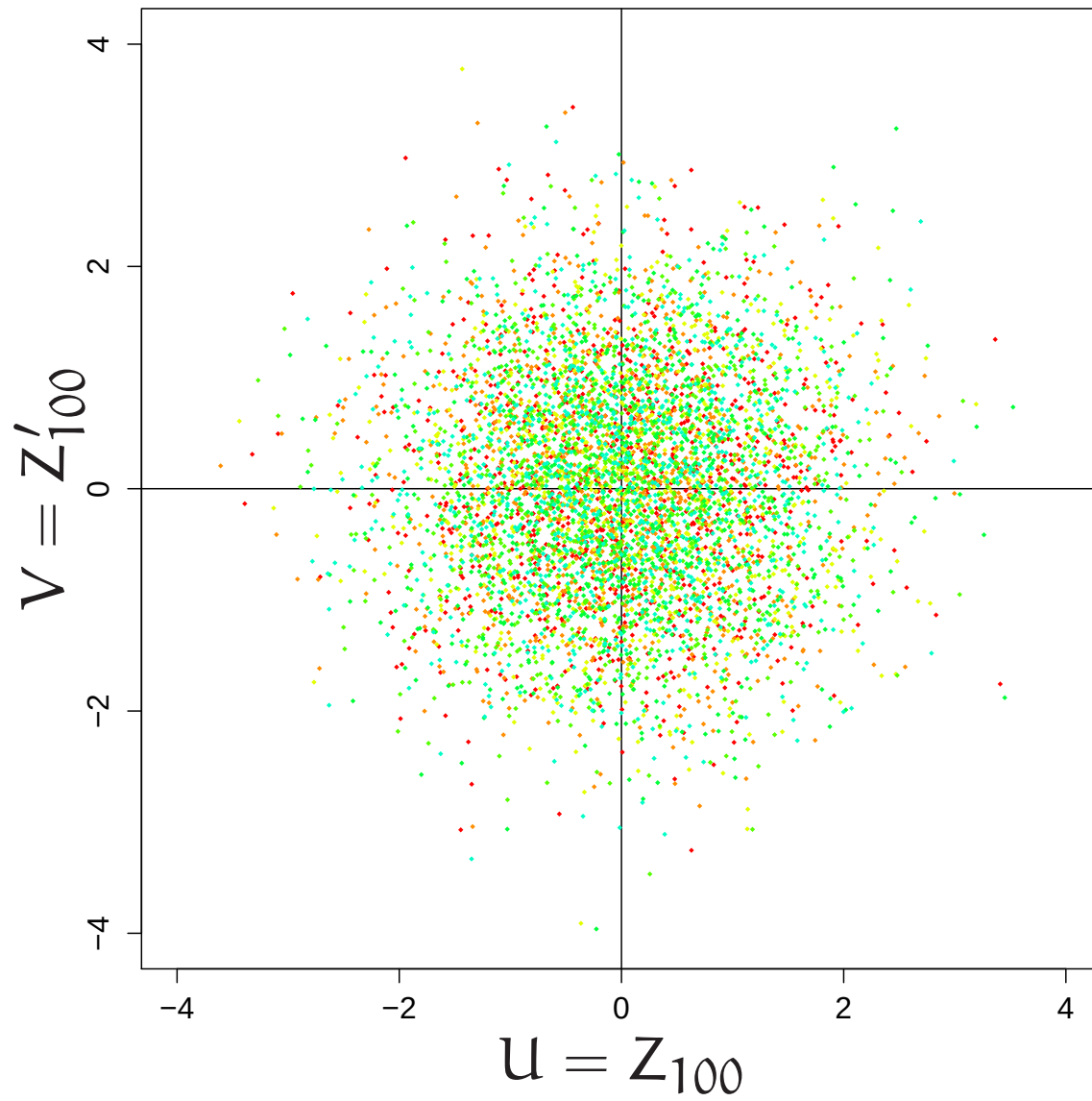
4000 Simulationen



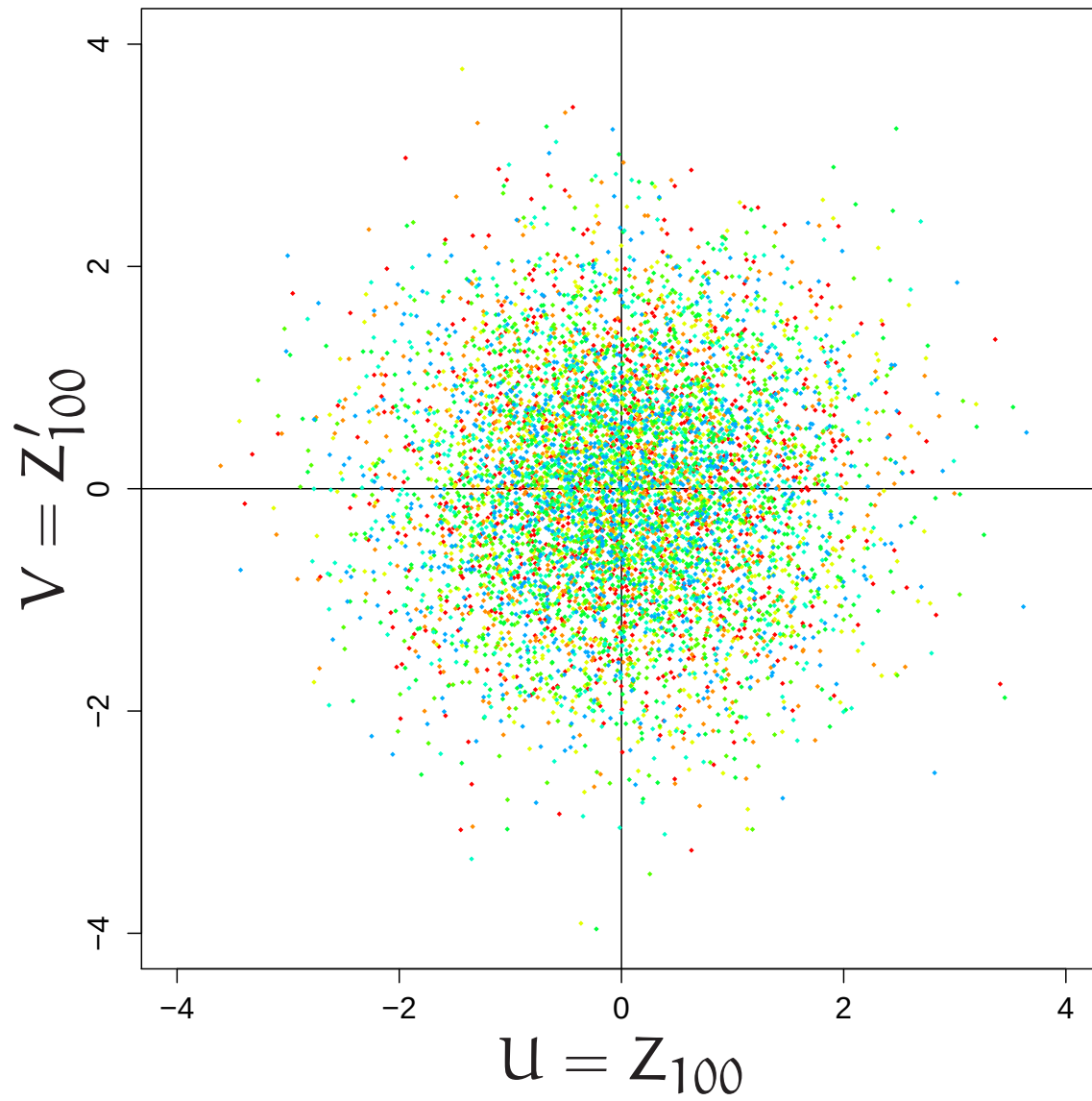
5000 Simulationen



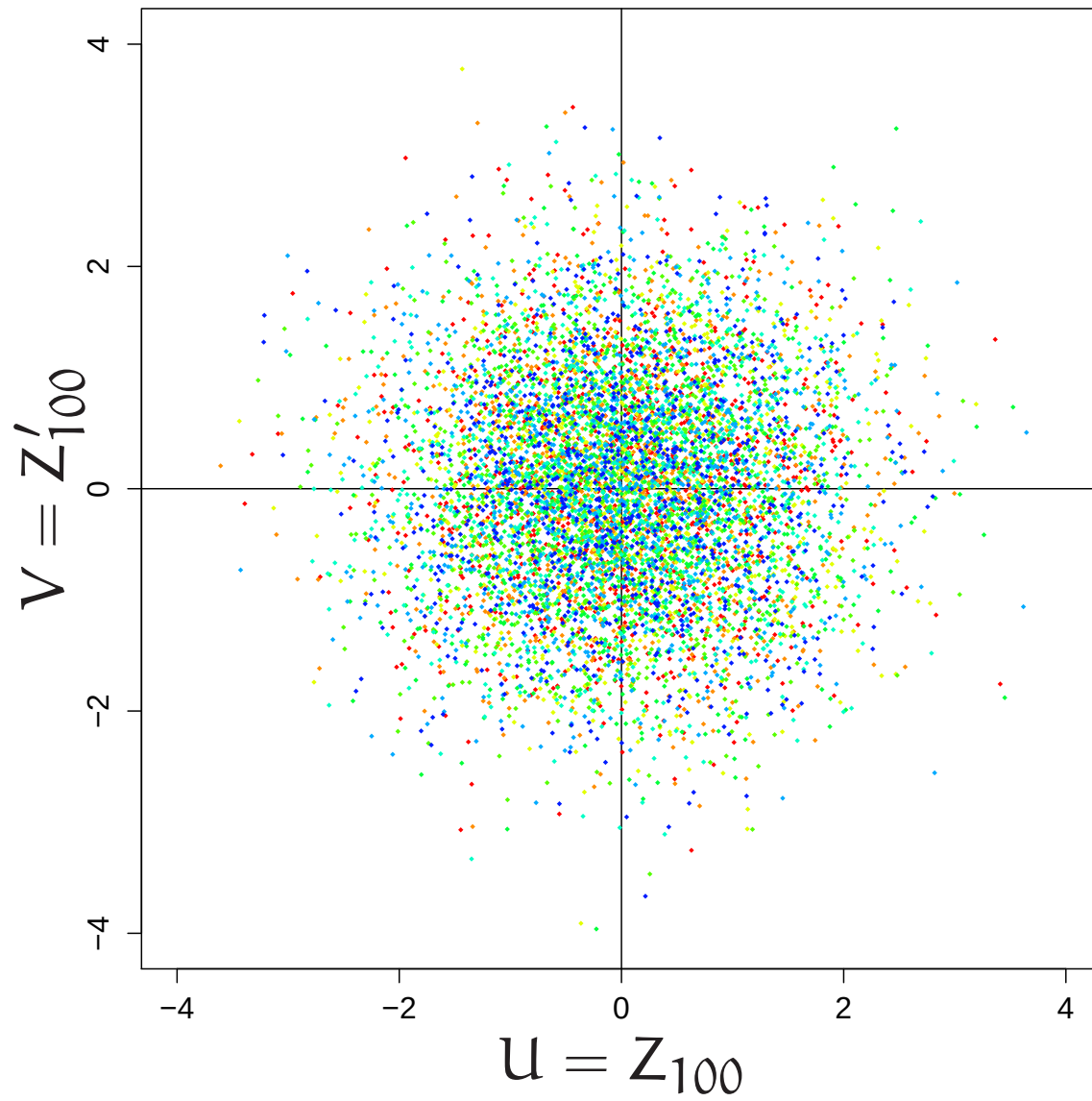
6000 Simulationen



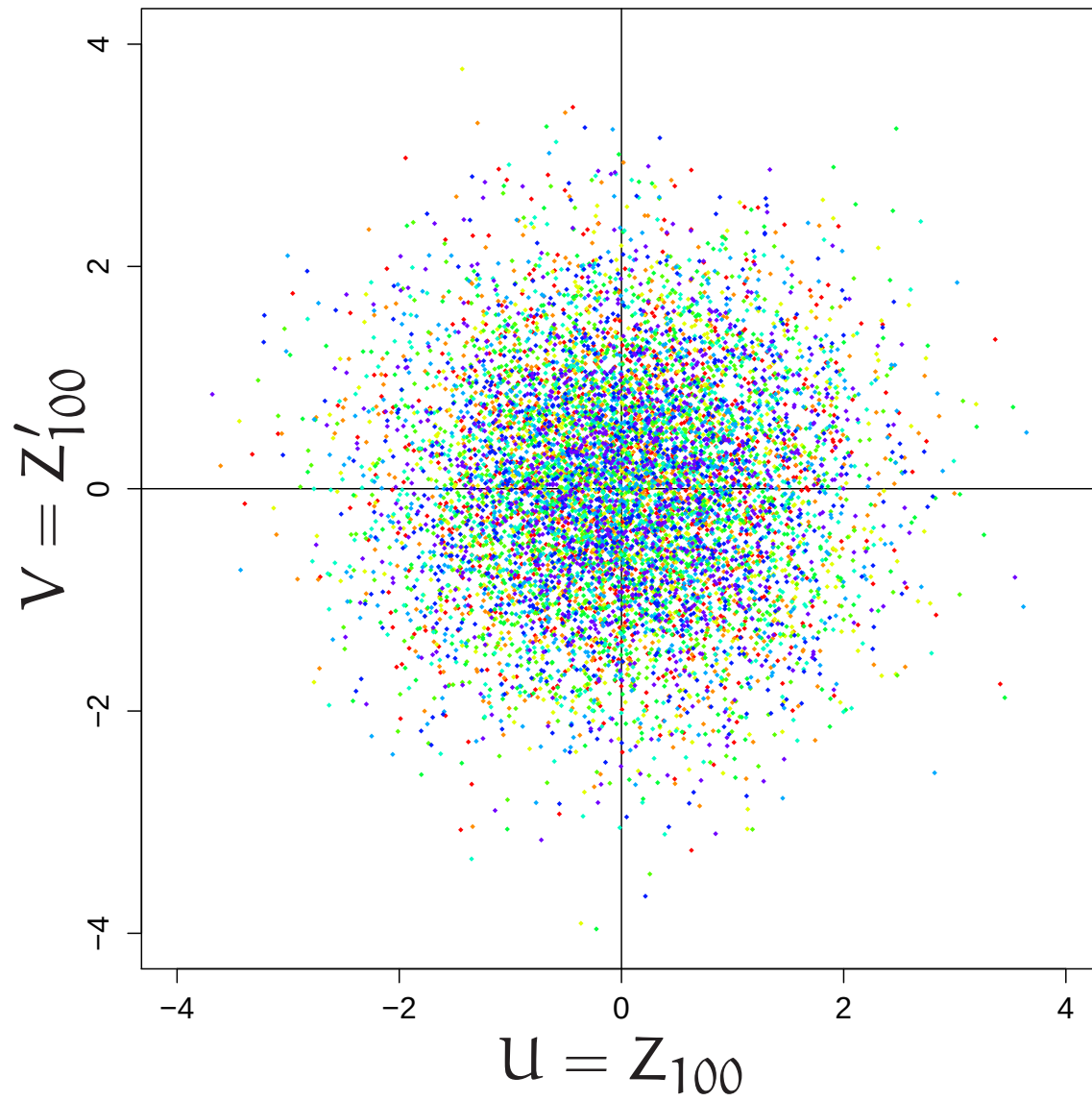
7000 Simulationen



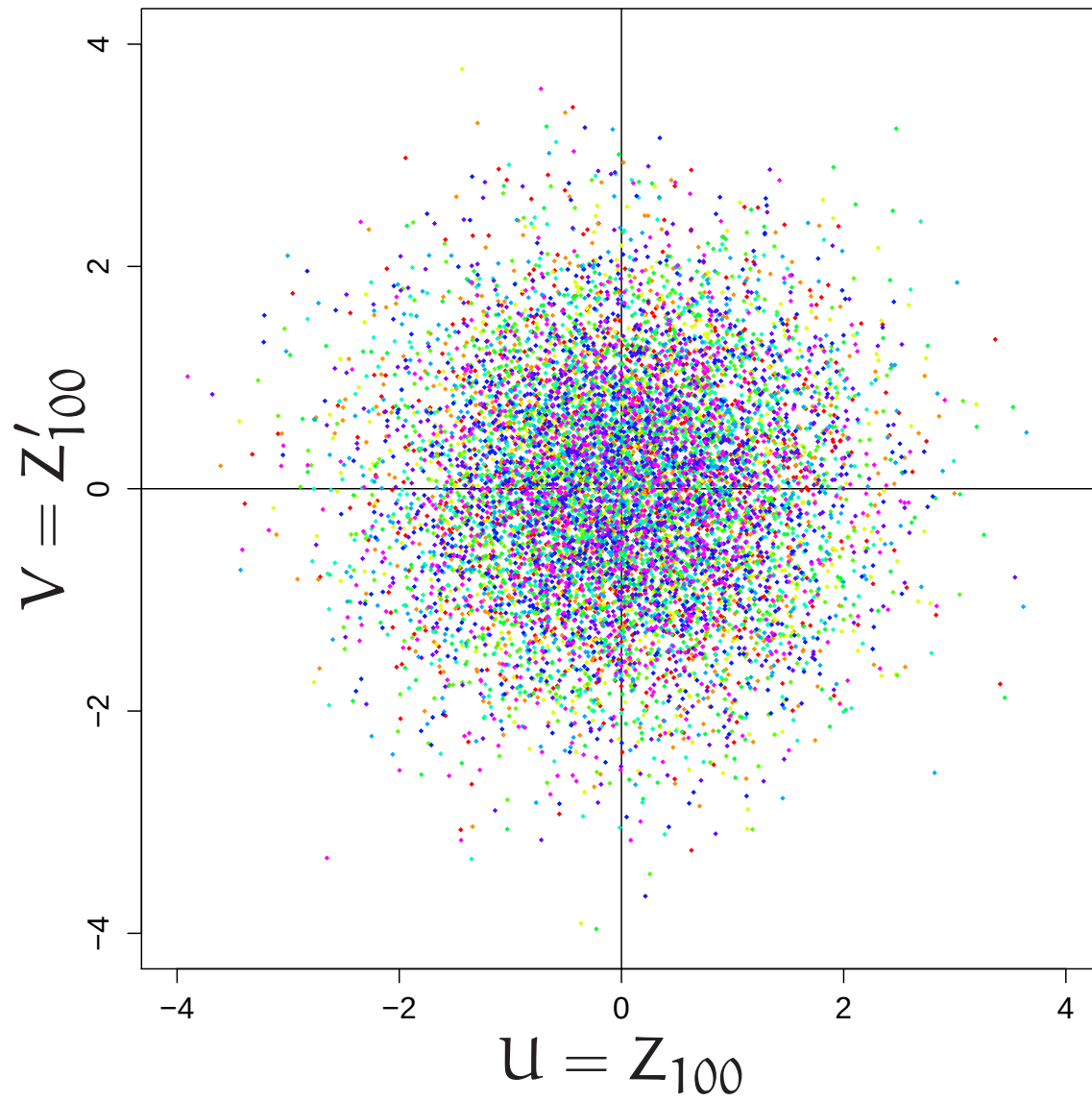
8000 Simulationen



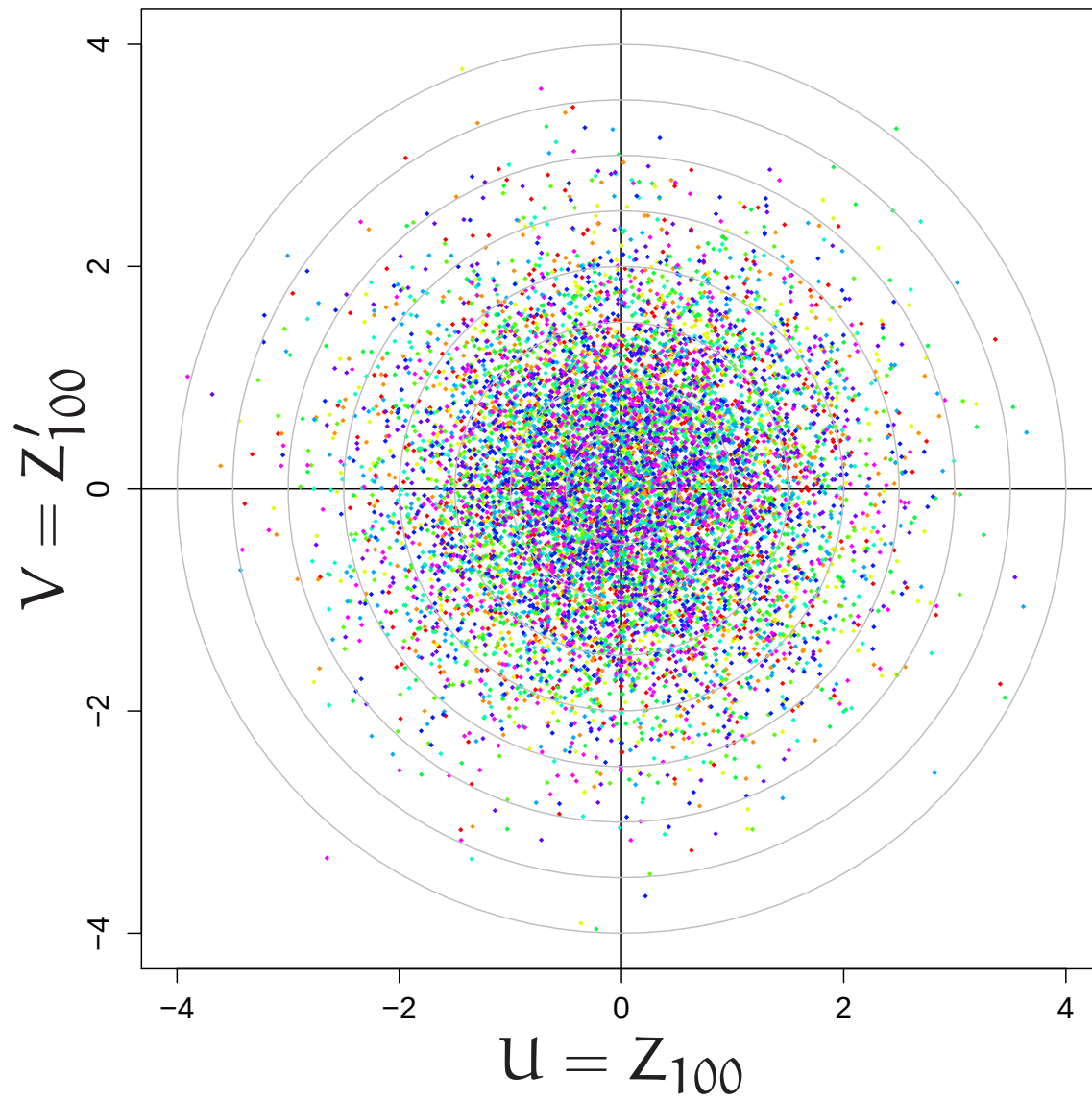
9000 Simulationen



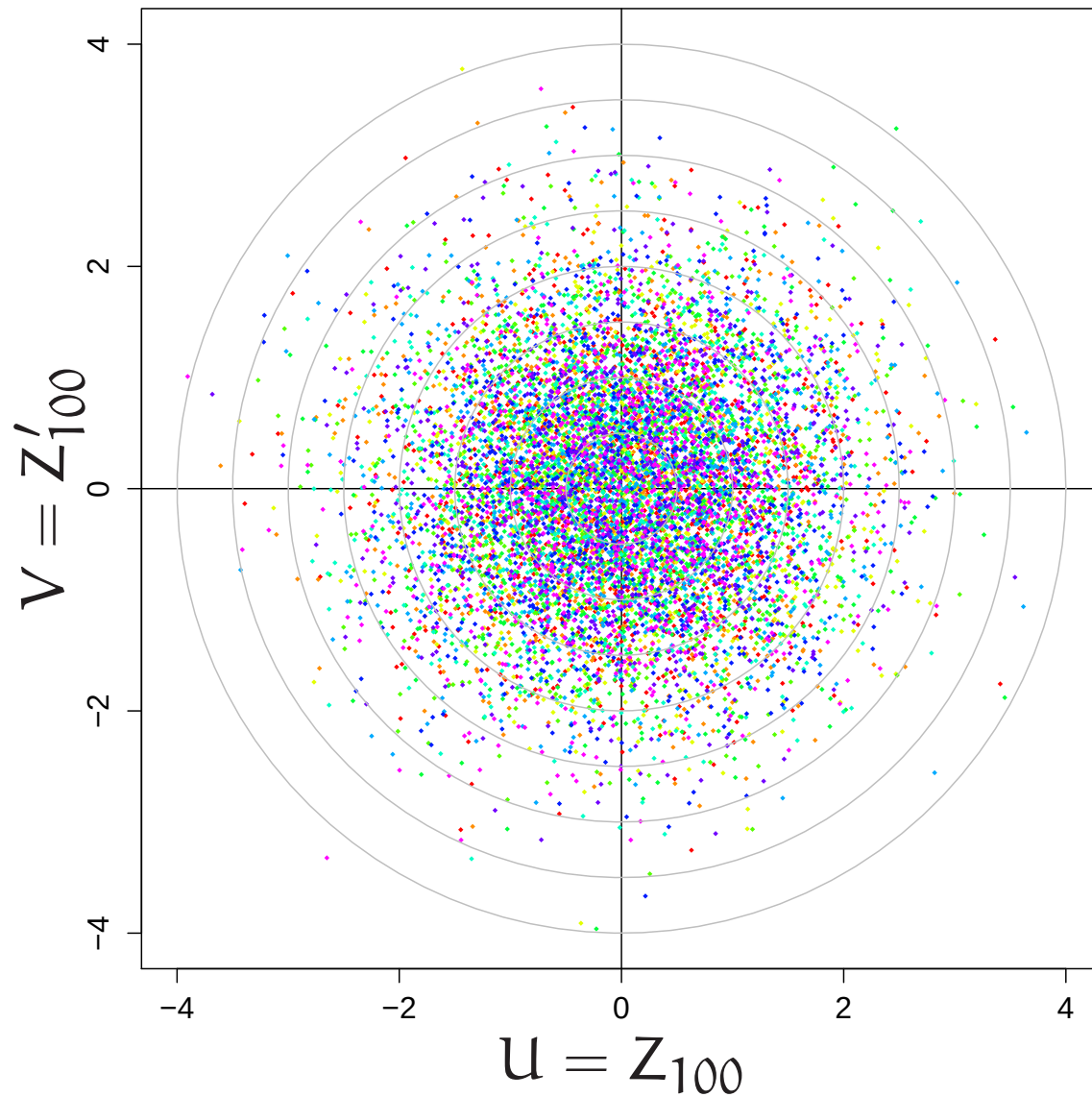
10000 Simulationen



10000 Simulationen



Die Verteilung von (U, V) ist annähernd rotationssymmetrisch!



Eine Charakterisierung der zweidimensionalen Standardnormalverteilung

Behauptung:

Aus “ U und V unabhängig und identisch verteilt’

und

“Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch”

folgt,

dass U und V normalverteilt sind:

$$f_U(x) = f_V(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Denn:

U, V *unabhängig* bedeutet:

$$(*) \quad f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a) f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$(**) \quad f_{(U,V)}(a, b) = g(r), \quad r := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Mit $f_U = f_V =: h$ folgt aus $(*)$ und $(**)$:

$$h(a)h(b) = g(r), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$h(a) h(b) = g(r), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die zwei Paare (a, b) und $(0, \sqrt{a^2 + b^2})$ haben dasselbe r .

Also:

$$h(a) h(b) = h(0) h(\sqrt{a^2 + b^2})$$

Das ist eine Gleichung für h . Eine Lösung hiervon ist:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

Denn

$$e^{-a^2} e^{-b^2} = 1 \cdot e^{-(a^2+b^2)}$$

$$h(a) h(b) = h(0) h(\sqrt{a^2 + b^2})$$

Wie sieht die allgemeine Lösung aus?

$$w(u) := h(\sqrt{u}), \quad u \geq 0, \text{ erfüllt}$$

$$w(a^2)w(b^2) = w(0)w(a^2 + b^2), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$w(u) w(v) = k_0 w(u + v), \quad u, v \geq 0$$

hat als allgemeine Lösung

$$w(u) = k_0 e^{-k_1 u}, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt:

$$h(a) = w(a^2) = k_0 e^{-k_1 a^2}.$$

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz
lässt sich erraten
(in konkreten Fällen,
mit etwas Glück).