Vorlesung 7a

Der Zentrale Grenzwertsatz

Teil 3

Erlebnis:

Via Monte Carlo zur Gaußschen Glockenkurve

Nehmen wir an,

die am Ende von Teil 1 genannten Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten wir ihn entdecken?

Wie kämen wir auf die “Glockenkurve”?

Warum gerade $e^{-x^2/2}$?

e

Ein Ausflug mit Brooks Ferebee

Ein Beispiel: Summen von

unabhängigen uniform verteilten Zufallsvariablen

Wir denken an

Rundungsfehler bei Addition

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5\ldots$$

Im Rechner

$$\pi \leftarrow 3.14159265358979$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

Annahme: X uniform verteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx ?$$

Der Zentrale Grenzwertsatz gibt die Auskunft:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ ist}$$

für große n

approximativ N$(0, n\,\sigma^2_{X_1})$-verteilt.

Ein Beispiel:

$X_1, X_2, \ldots$ unabhängig

und uniform auf $[-0.5, 0.5]$ verteilt

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

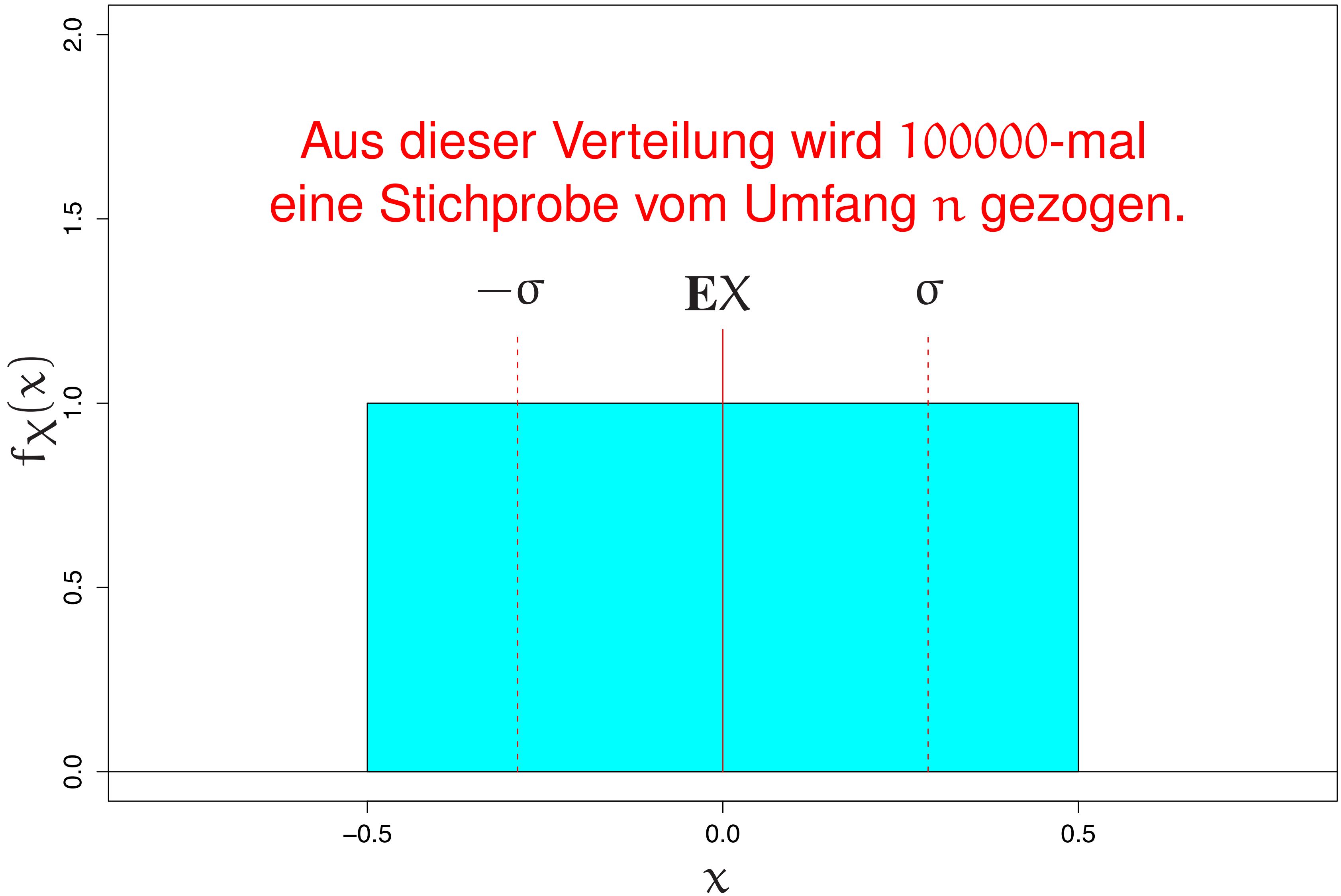
100000 Simulationen

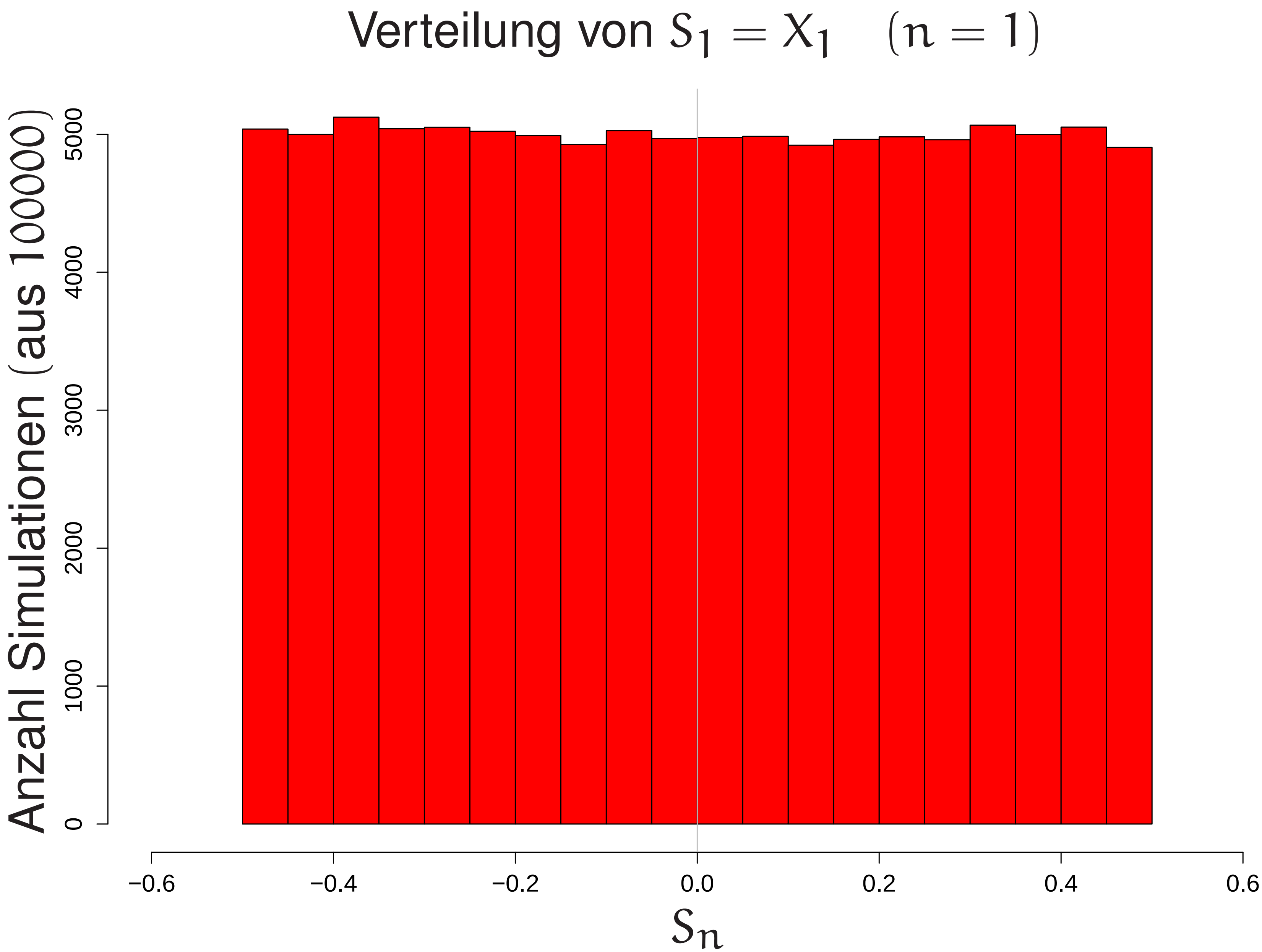
jeweils für

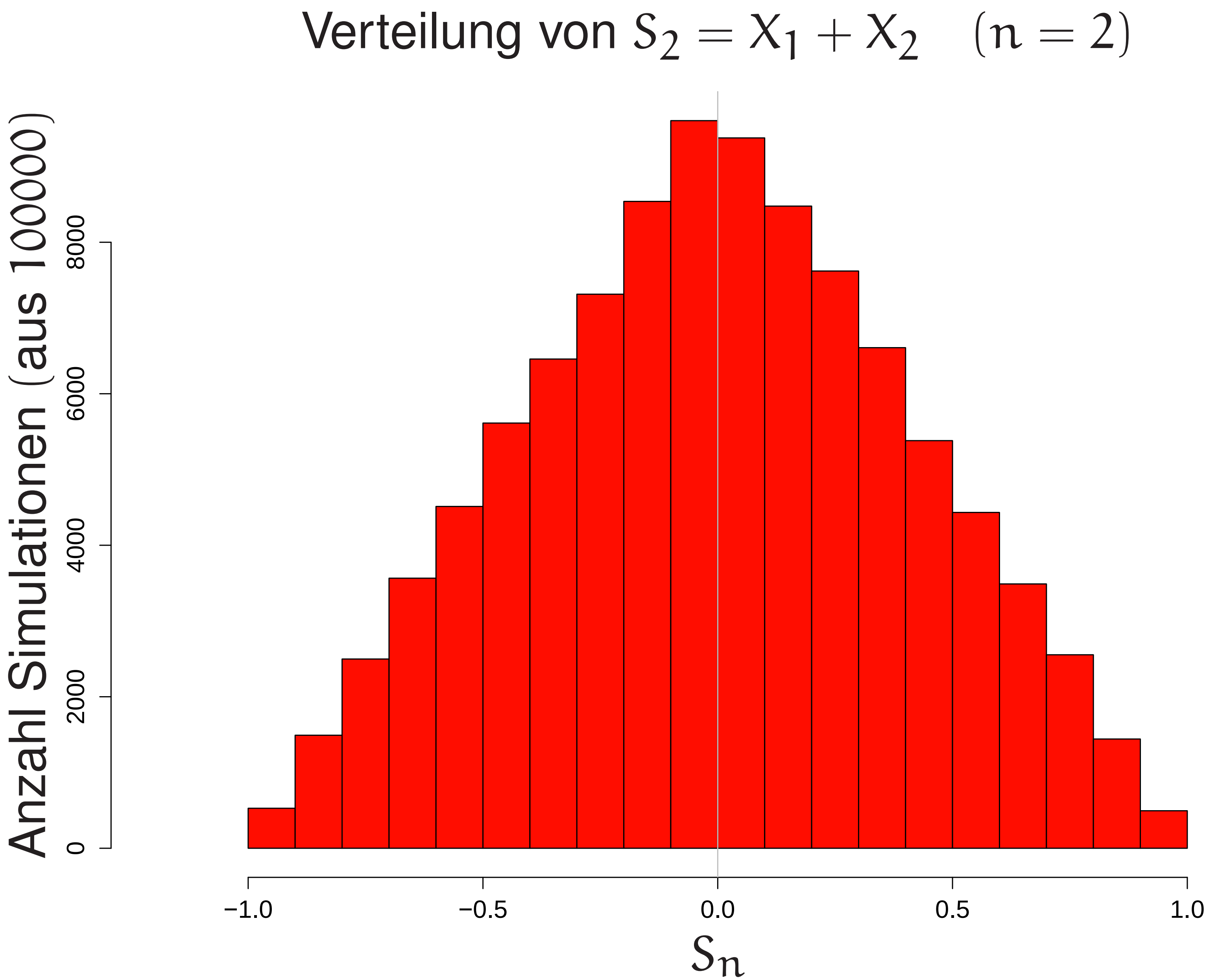
$$n = 1, 2, ..., 10$$

$$n = 15, 20, 30, ..., 100$$

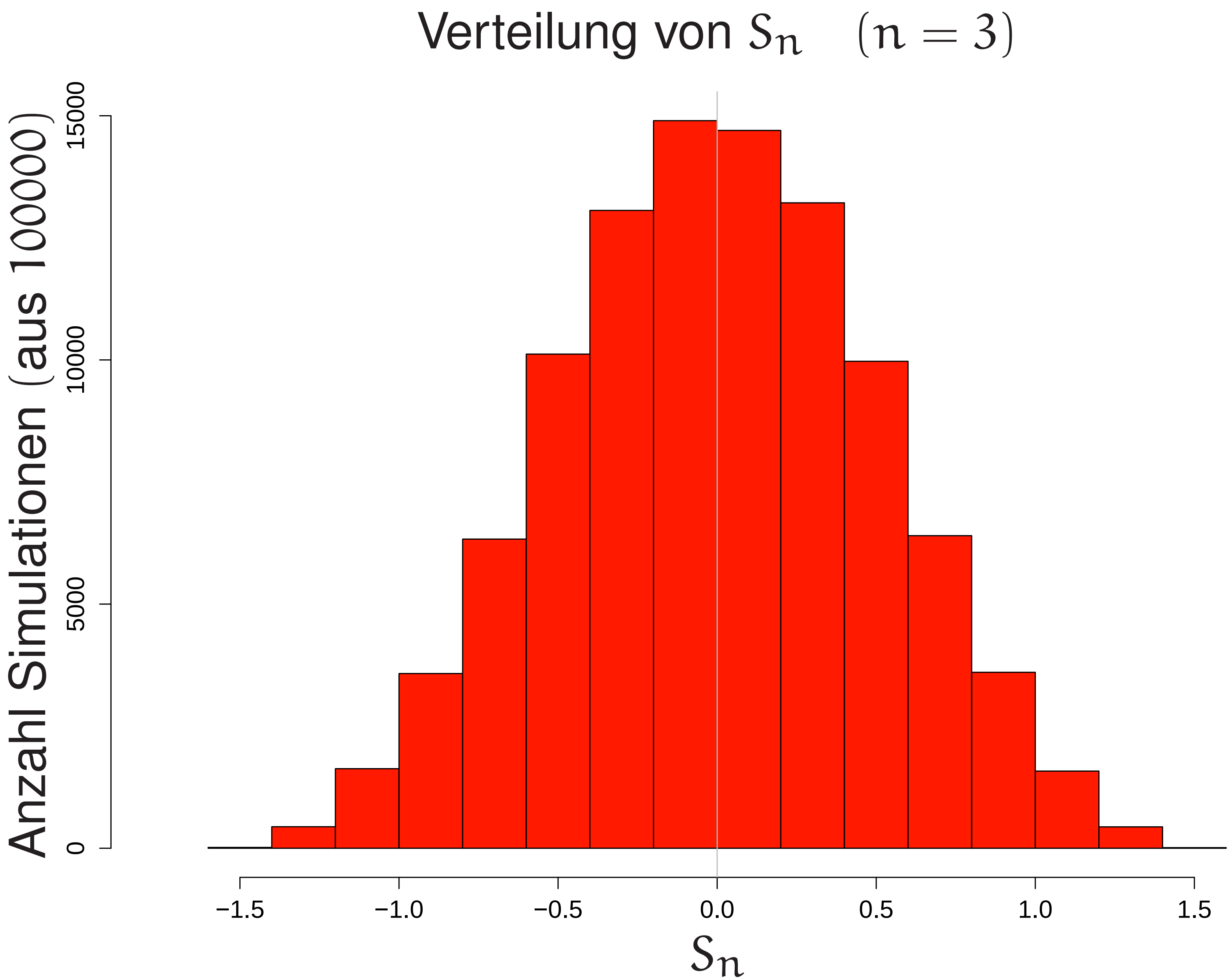
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X



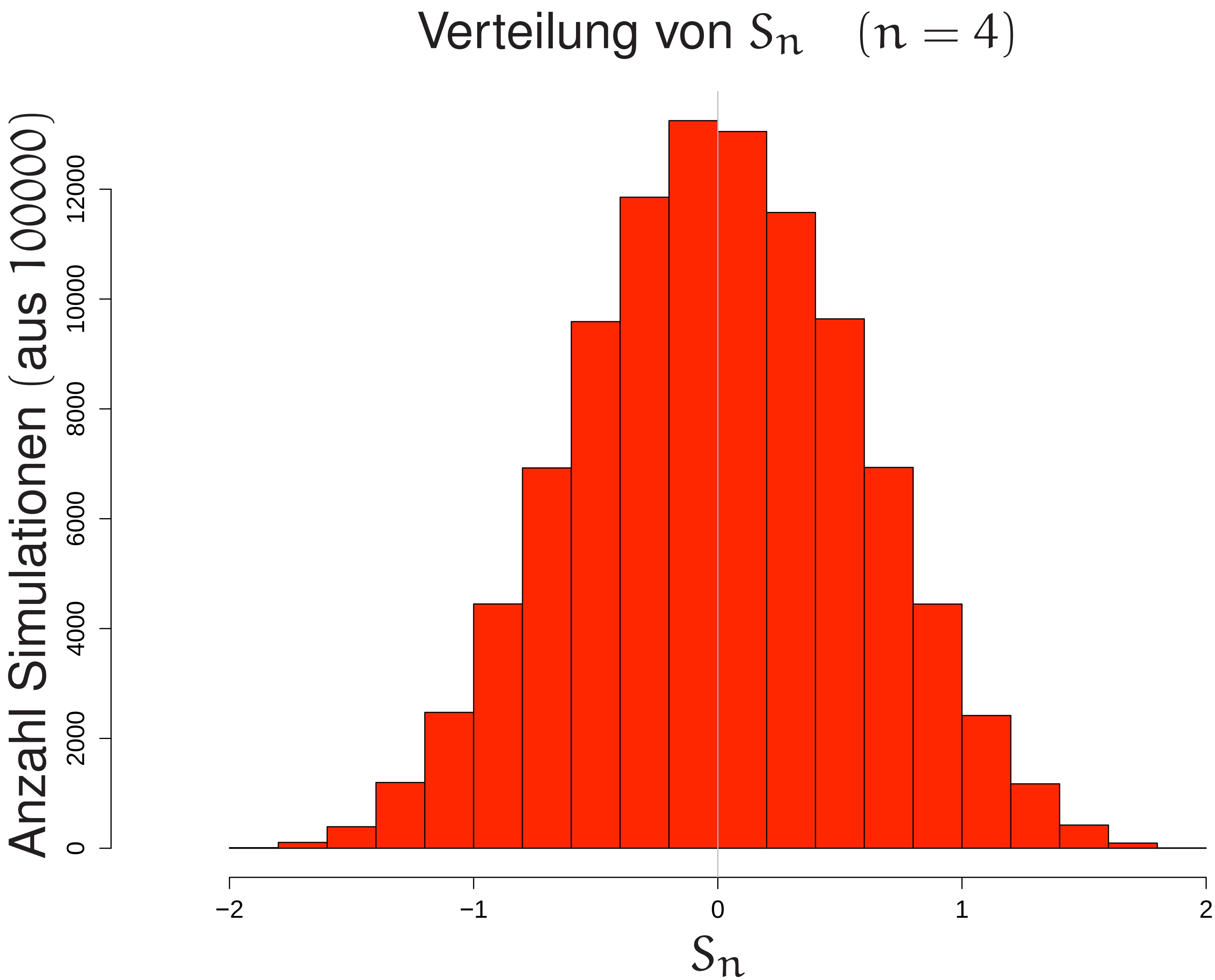

Verteilung von $S_1 = X_1 \quad (n = 1)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
1000
2000
3000
4000
5000
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
S_n



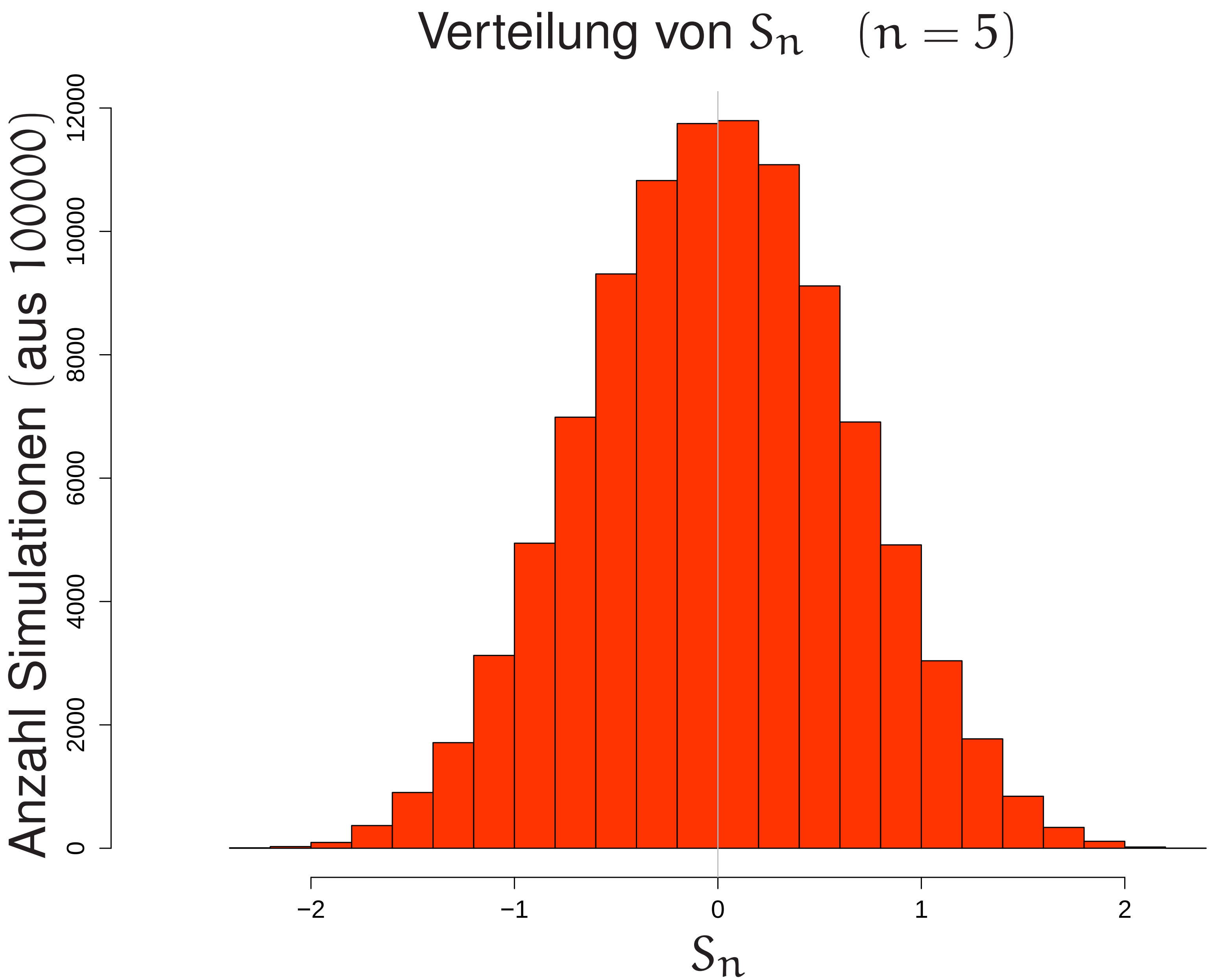
Verteilung von $S_2 = X_1 + X_2 \quad (n = 2)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
S_n



Verteilung von S_n $(n = 3)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
S_n



Verteilung von S_n $(n = 4)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n

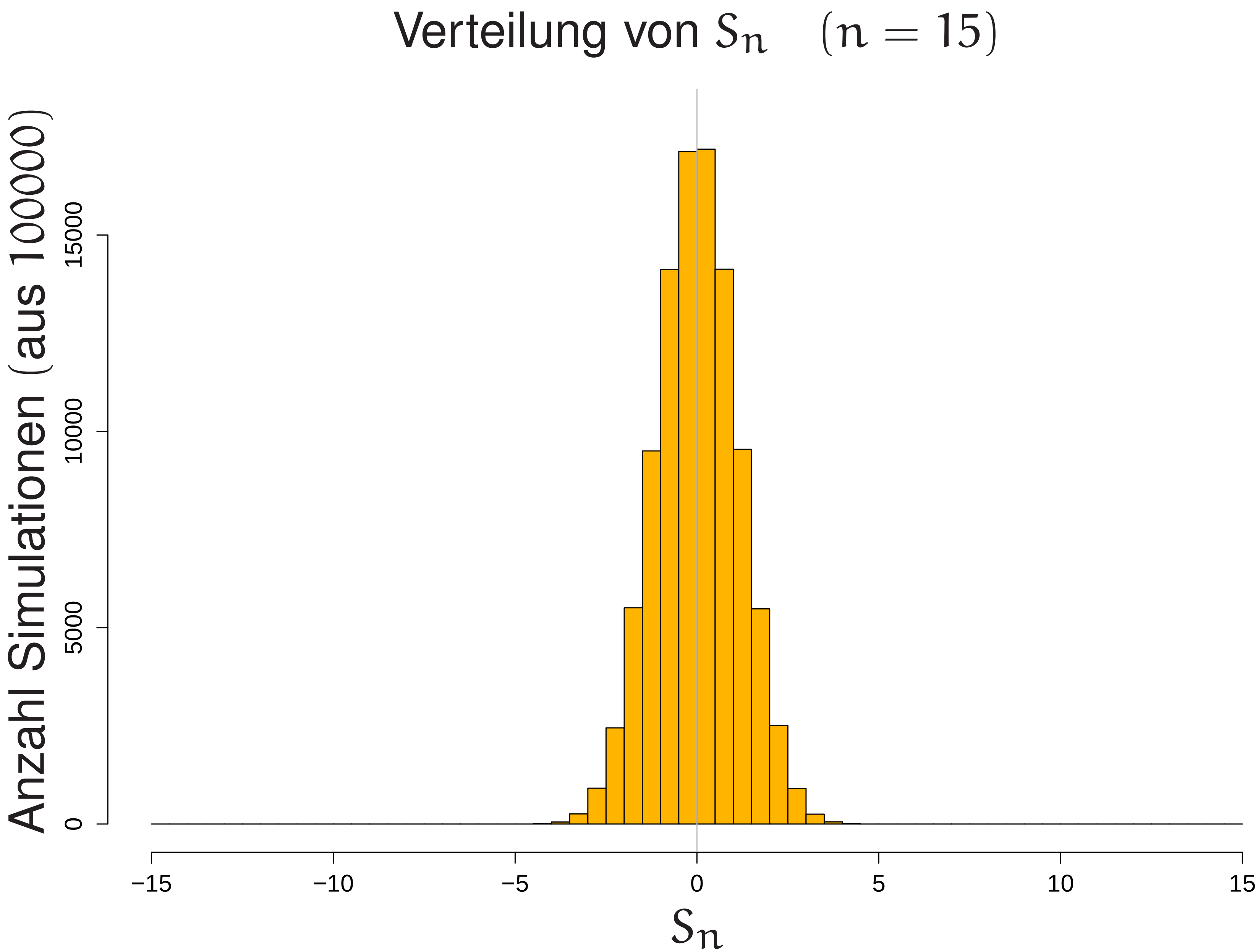


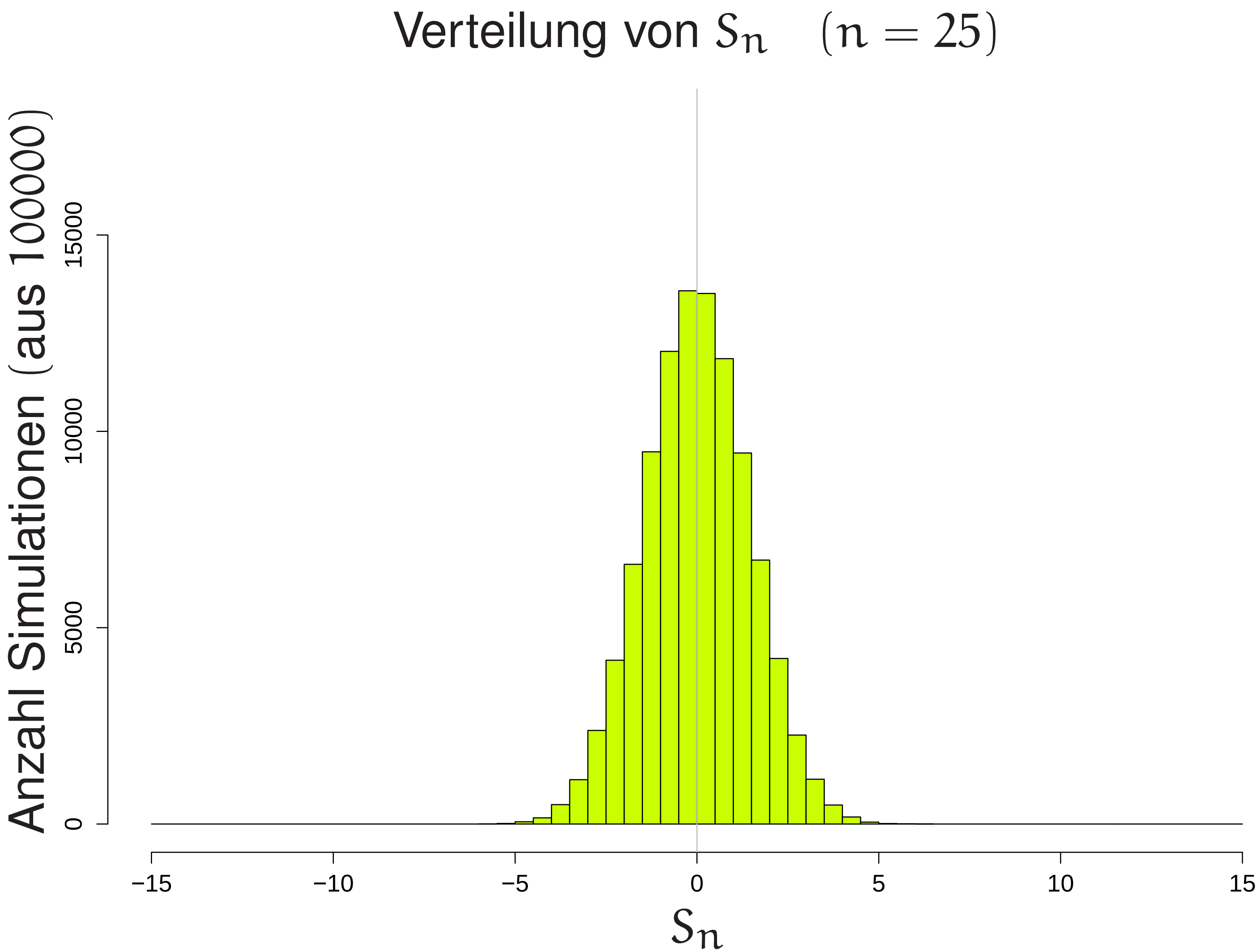
Verteilung von S_n $(n = 5)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n

Bisher: dynamsiche Skalierung der Breite.

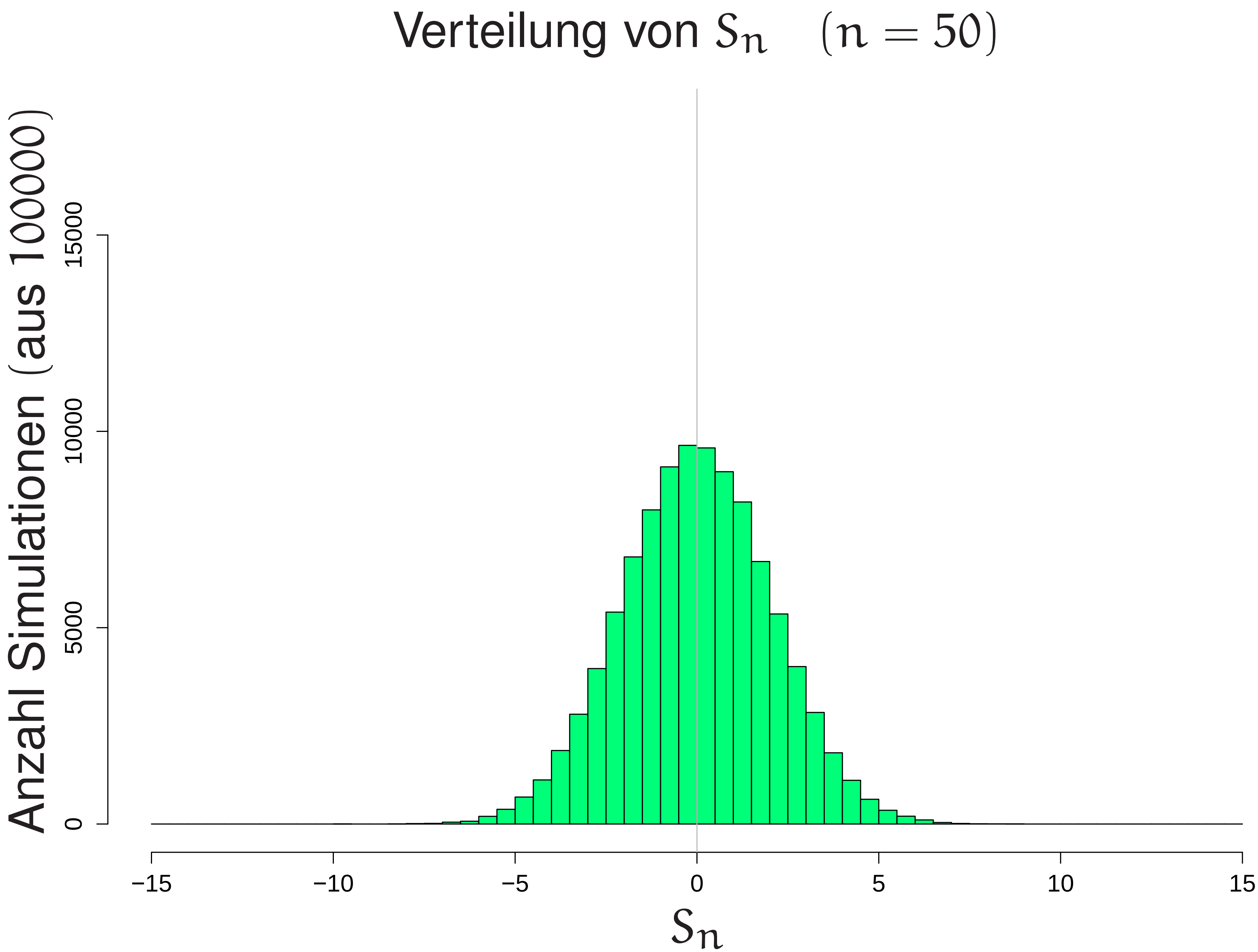
Ab jetzt: feste Skalierung der Breite,

mit dem Intervall [-15, + 15]

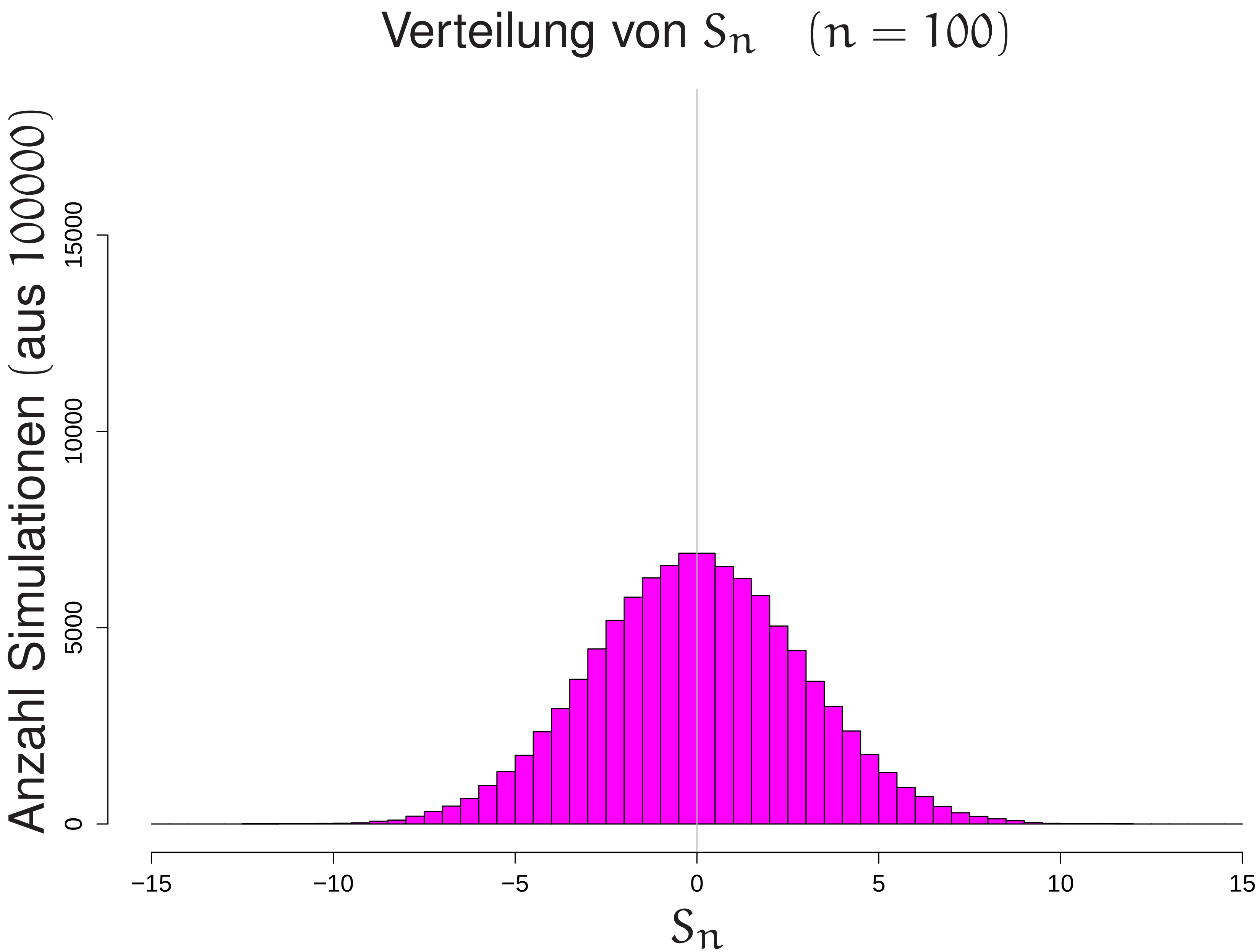

Verteilung von S_n $(n = 15)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



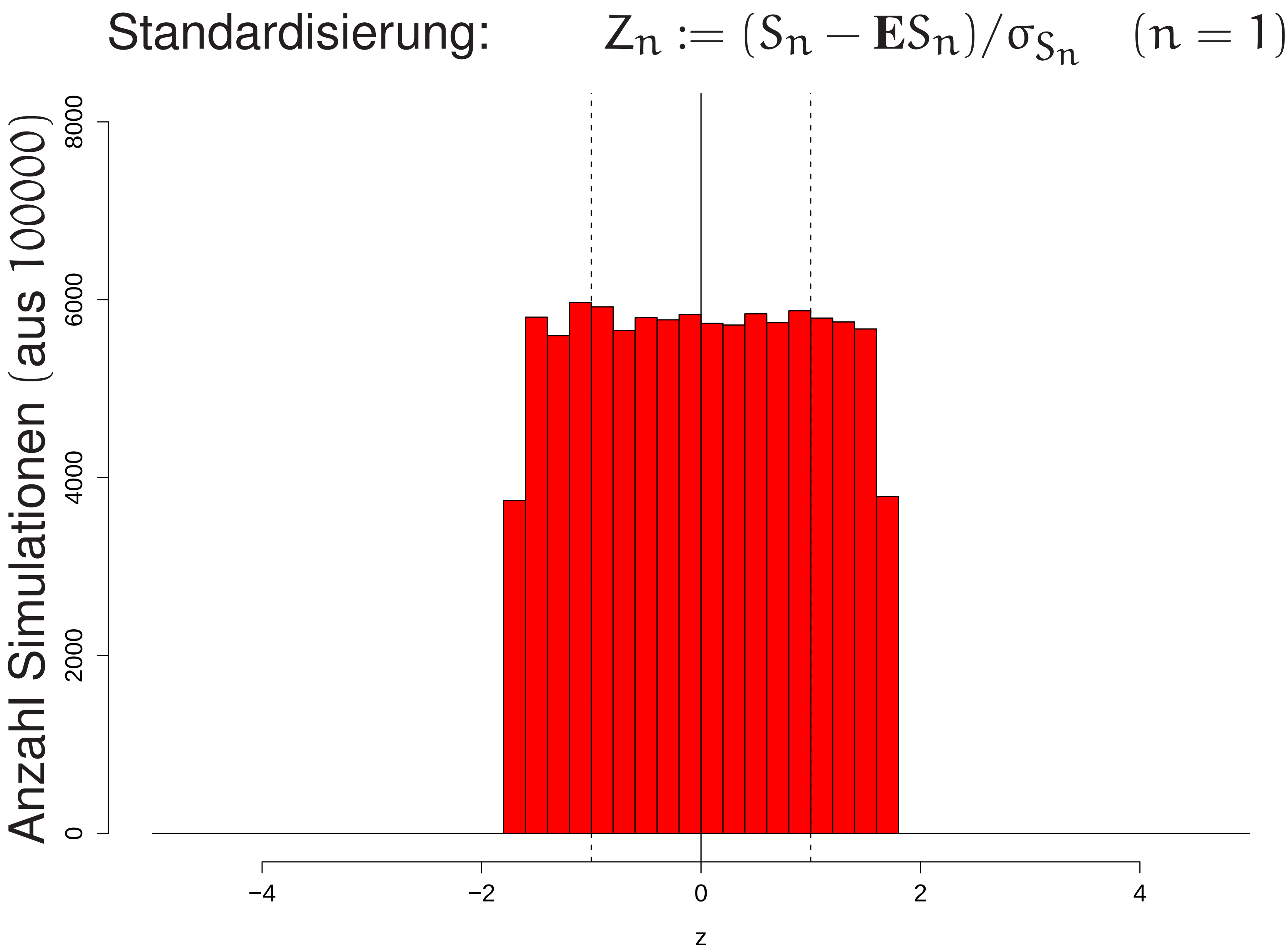
Verteilung von S_n $(n = 25)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



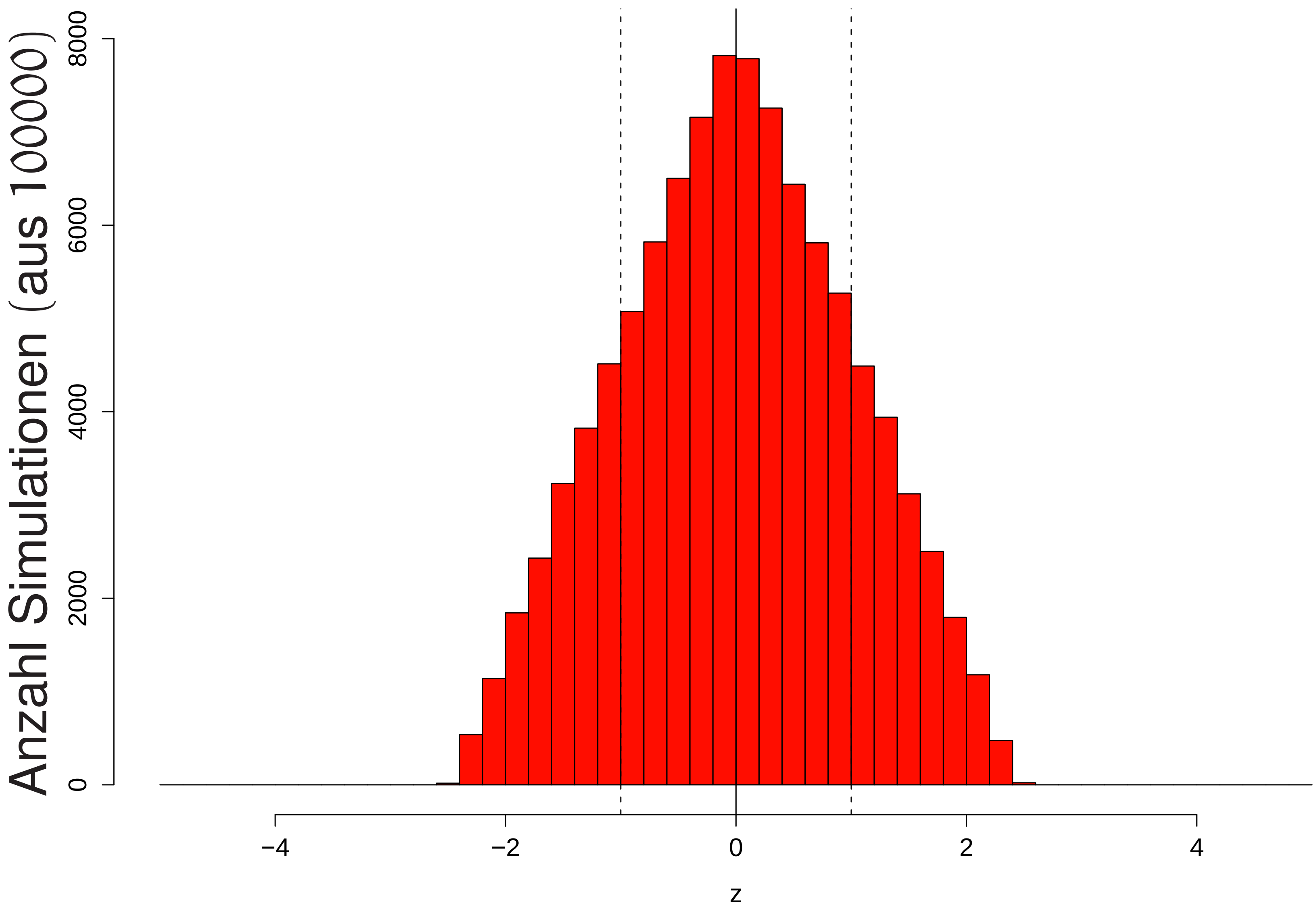
Verteilung von $S_n \quad (n = 50)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



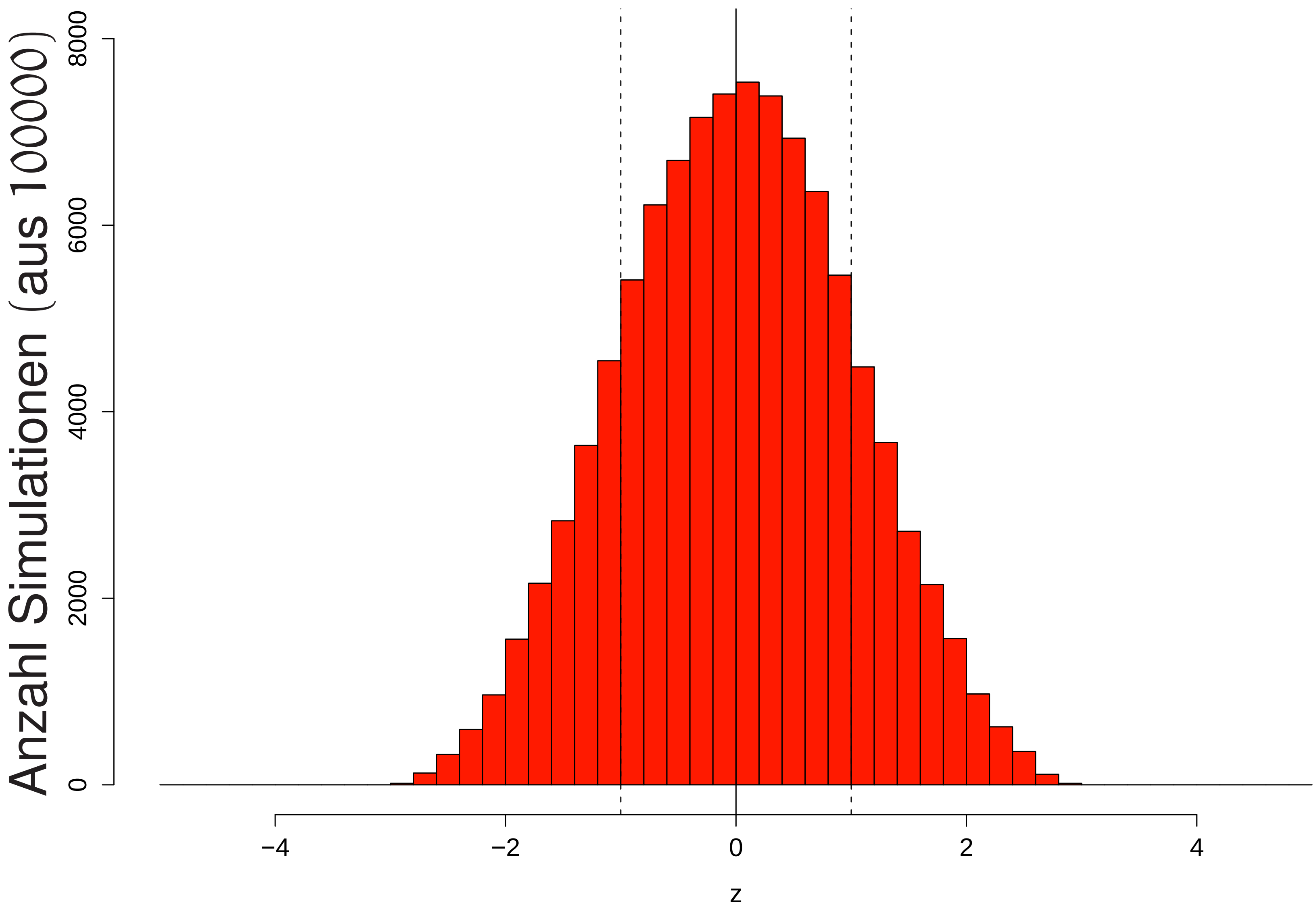
Verteilung von S_n $(n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

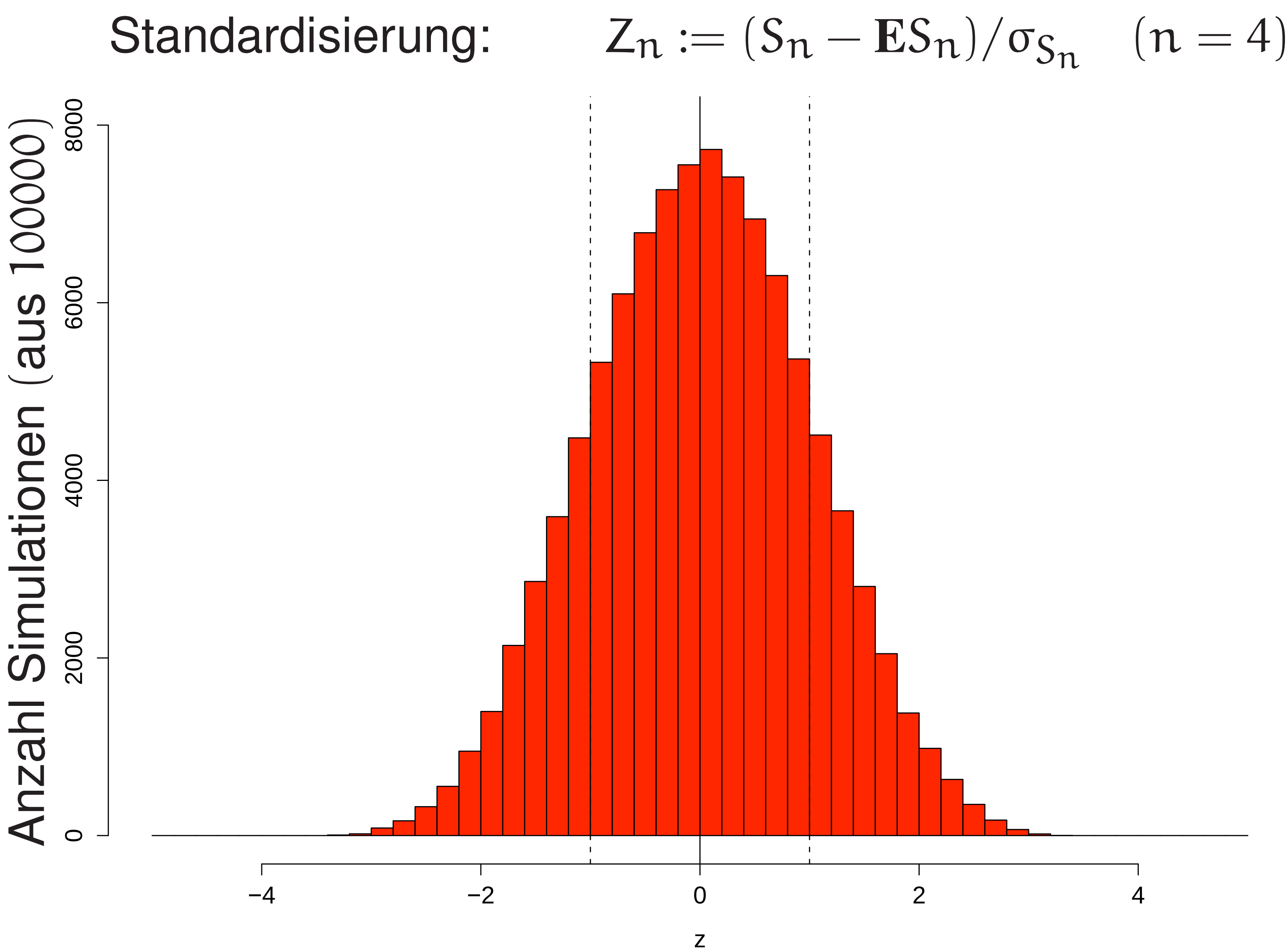

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 1)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

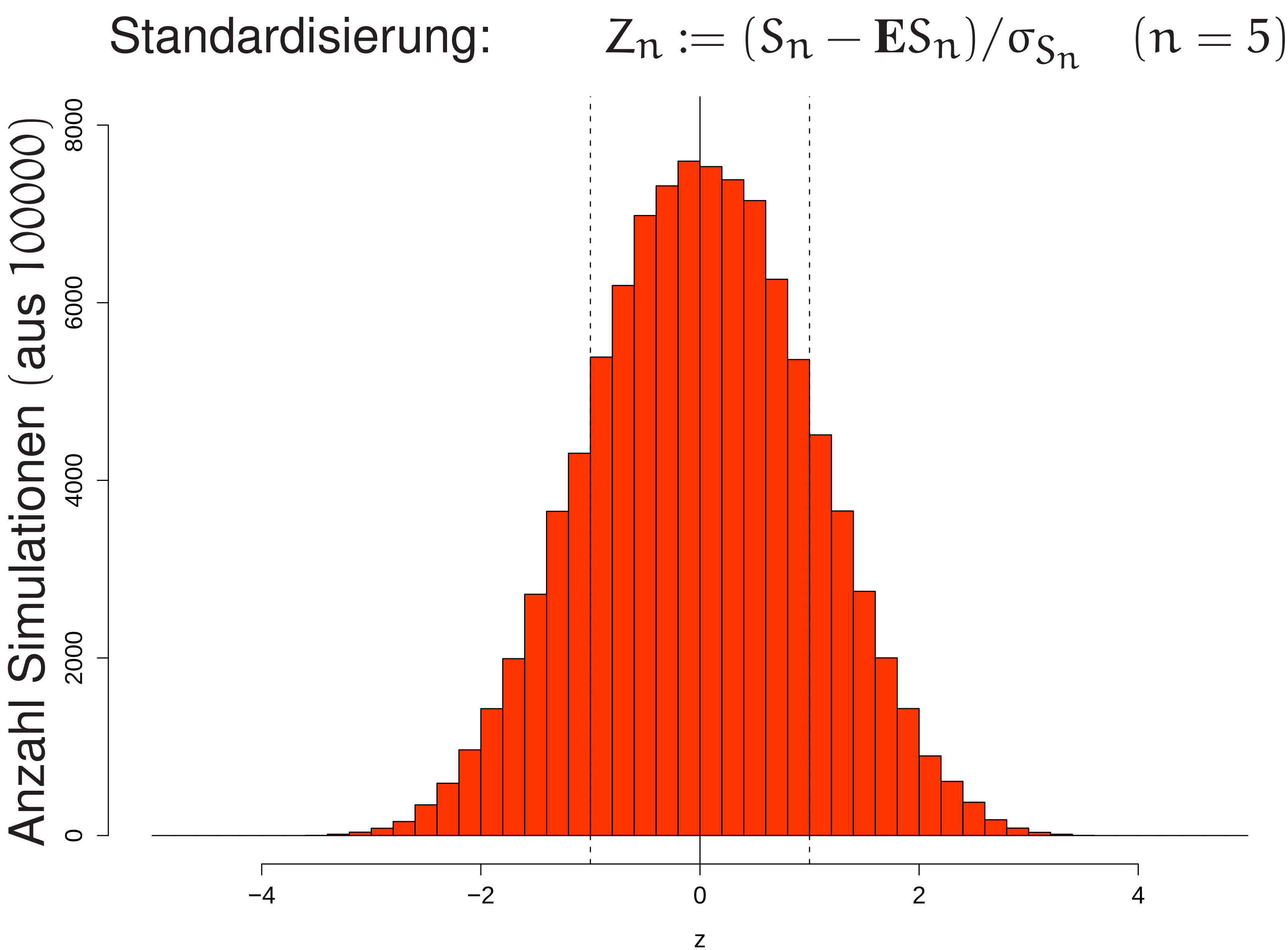
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 2)$

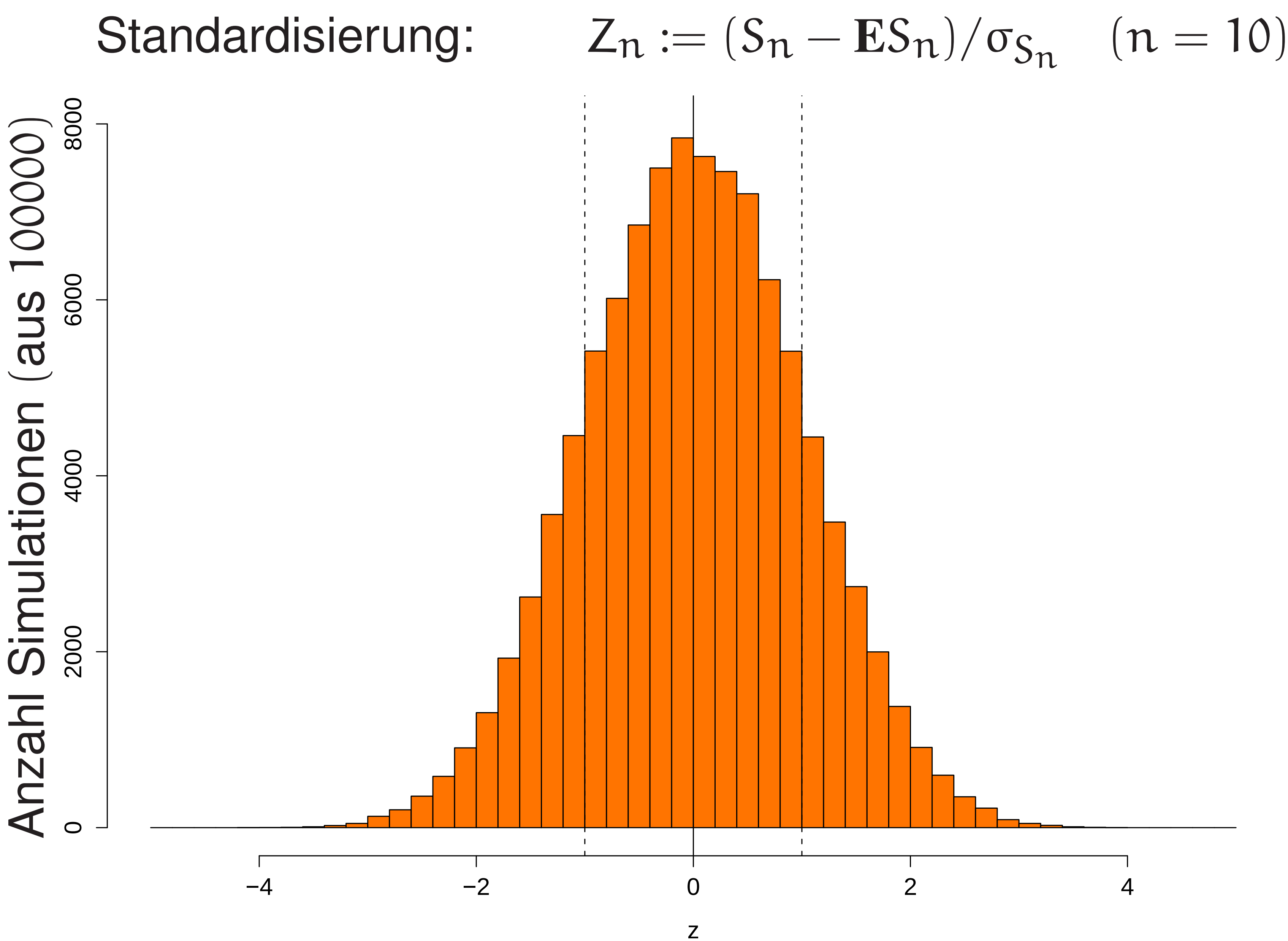


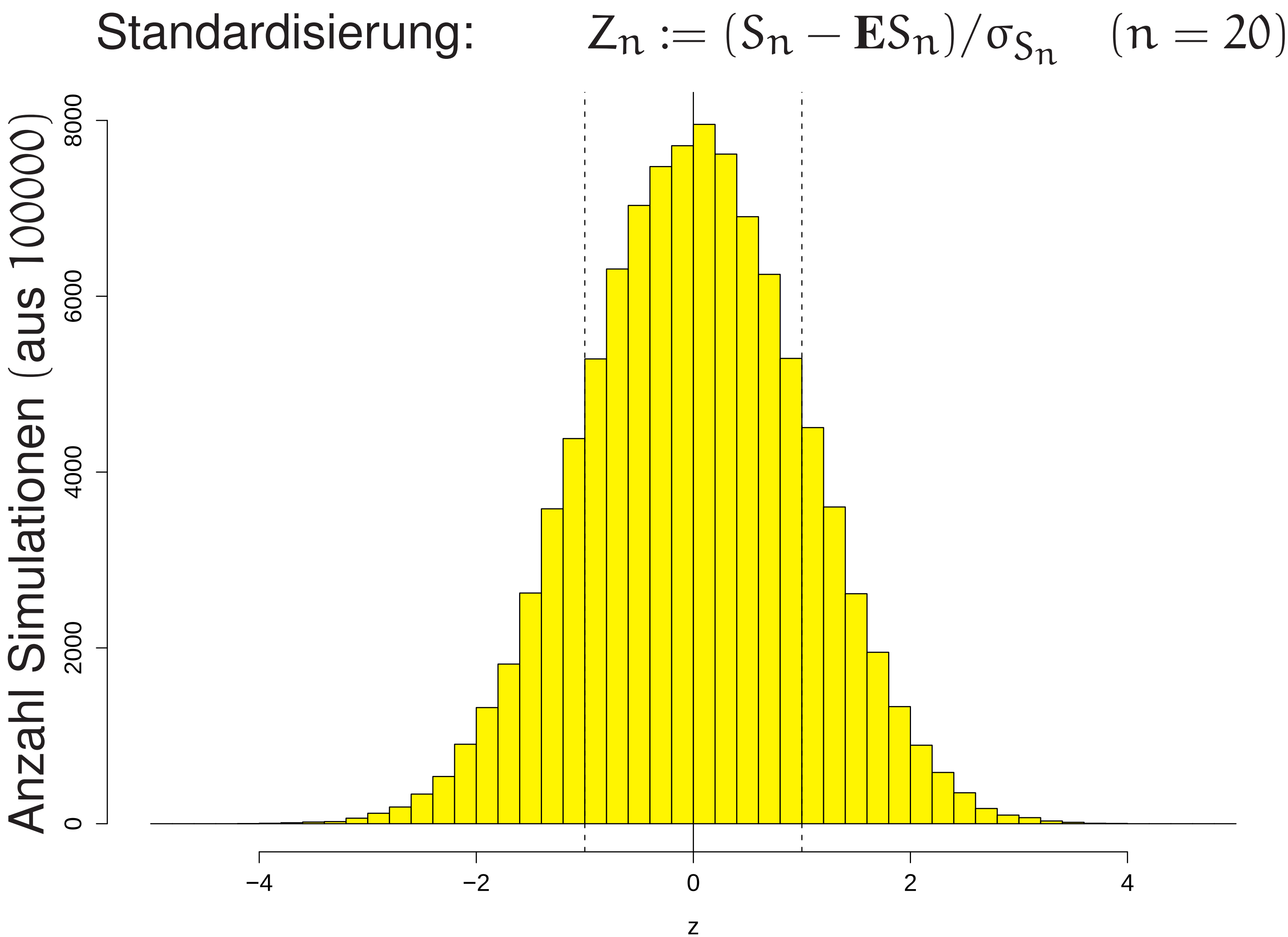
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 3)$



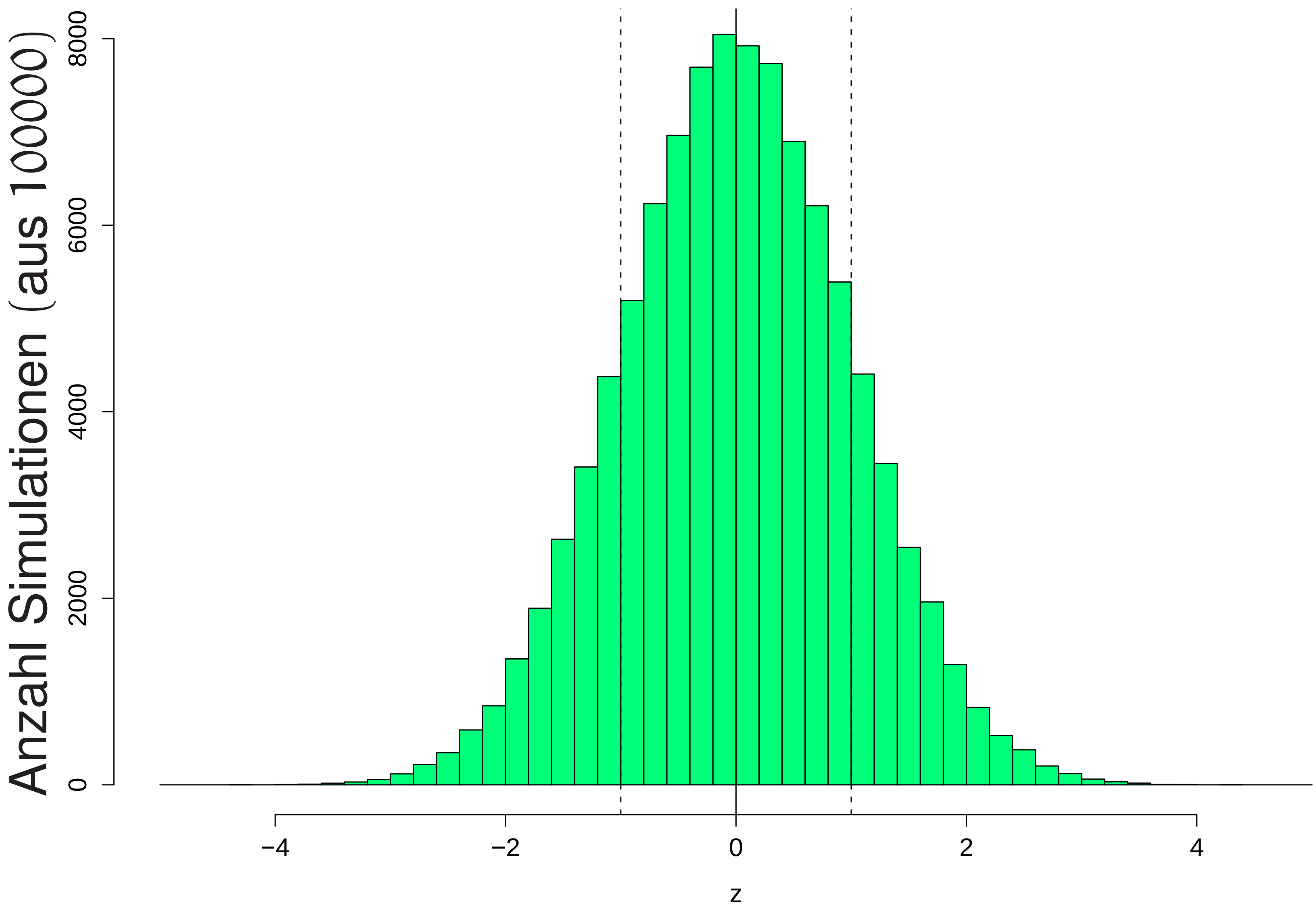

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 4)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

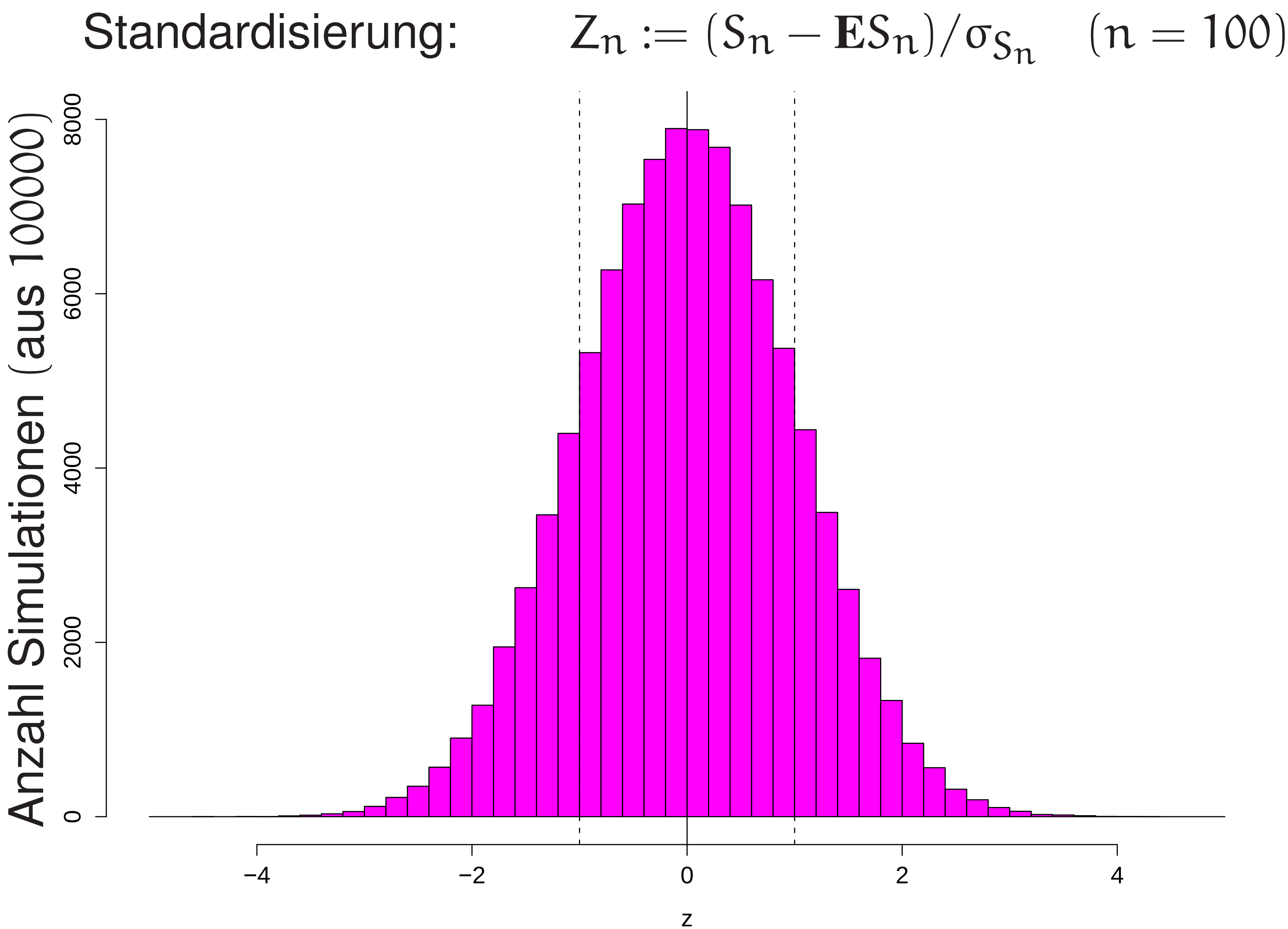

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 5)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 10)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 20)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 50)$




Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Die Verteilung von

Z_{100}

ist glockenförmig.

Um welche Glockenkurve handelt es sich genau?

Das nehmen wir im nächsten Teil unter die Lupe.