Vorlesung 7a

Der zentrale Grenzwertsatz

Teil 1

Die Botschaft

(Buch S. 77)

Zur Erinnerung:

$(Z_1, \ldots, Z_n)$ heißt standard-normalverteilt im $\mathbb{R}^n$

$$:\Longleftrightarrow$$

$Z_1, \ldots, Z_n$ sind unabhängig und N(0,1)-verteilt

Auch $\dfrac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}$ ist dann N(0,1)-verteilt!

Der Zentrale Grenzwertsatz liefert

eine gewaltige Weiterung der vorigen Aussage

(asymptotisch für große n):

Zentraler Grenzwertsatz (Version (0,1))
salopp formuliert:

“Die durch $\sqrt{n}$ geteilte Summe von VIELEN

unabhängigen, identisch verteilten

nicht notwendig normalverteilten

$\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit Erwartungswert 0 und Varianz 1

ist annähernd standard-normalverteilt”

Satz (ZGWS, “Version (0,1)”)

Seien $X_1, X_2, \ldots$

unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable

mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \in [c, d]\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

Jetzt: (μ, σ^2) statt $(0, 1)$:

Hat X den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2,
dann hat $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Man nennt $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ auch die *Standardisierung* von X.

Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X,
dann ergibt der ZGWS (Version (0,1))
angewandt auf die Standardisierungen der X_i:

Zentraler Grenzwertsatz (Klassische Version)

Seien $X_1, X_2, \ldots$

unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit

endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$.

Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [c, d]\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

In Worten:

"Die standardisierte Summe von VIELEN

unabhängigen, identisch verteilten

nicht notwendig normalverteilten

$\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

ist annähernd standard-normalverteilt"

Diese Aussage bleibt übrigens auch
unter schwächeren Bedingungen bestehen,
sowohl was die Unabhängigkeit,
als auch was die identische Verteiltheit betrifft.

Eine Botschaft zum Mitnehmen ins Leben
(salopp formuliert):
“ Die Summe von vielen
annähernd unabhängigen Zufallsvariablen,
die nicht notwendig identisch verteilt, aber
ungefähr von derselben Größenordnung sind,
ist annähernd normalverteilt.”

Der Münzwurf passt in den Rahmen des klassischen ZGWS:

X_i sei eine Bernoulli-Folge zum Parameter p,

also insbesondere:

$X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathbf{E}[X_i] = \mathbf{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbf{Var}[X_i] = npq$$

Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - np}{\sqrt{npq}} \in [c, d]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d e^{-a^2/2}\, da.$$

Das ist der alte Satz von de Moivre (1733, für $p = 1/2$))

und Laplace (1812, für allgemeines p).

Zentraler Grenzwertsatz:

Meilensteine in seiner Geschichte

Abraham de Moivre:

Der faire Münzwurf (1733)

Pierre-Simon Laplace:

Allgemeine binomiale Zufallsgrößen (1812)

Pafnuty Lvovich Chebyshev:

Skizze eines Beweises für den allgemeinen Fall (1887)

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov:

“Klassischer” zentraler Grenzwertsatz (1901)

Noch allgemeiner (1906)

Andrei Andreyevich Markov:

weitere Verallgemeinerungen (~ 1910)