Vorlesung 6b

Die Normalverteilung

Teil 4:

Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^2$ und auf $\mathbb{R}^n$

Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^2$

(vgl. Buch S. 71)

Zur Erinnerung:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt (auf $\mathbb{R}^1$).

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\varphi(a_1)\, da_1\; \varphi(a_2)\, da_2$$

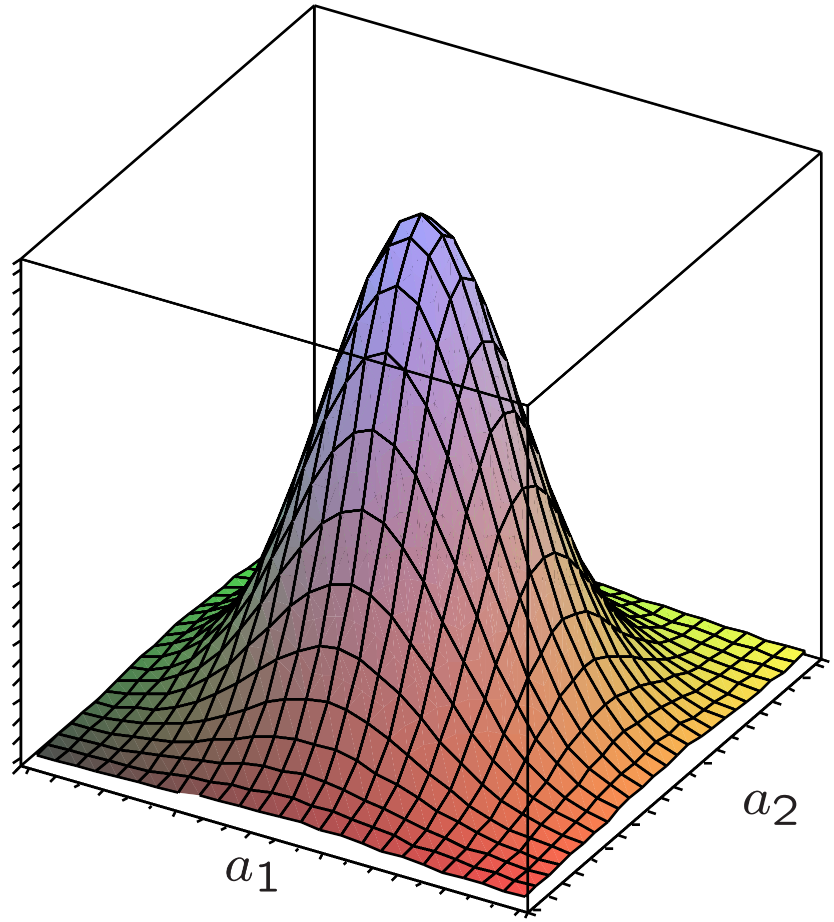
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2}\, da_1 da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\, da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2,\ |a|^2 := a_1^2 + a_2^2.$$

Die Dichte ist rotationssymmetrtisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a)\,da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt **standard-normalverteilt auf** $\mathbb{R}^2$.

Eine Folgerung aus der Rotationssymmetrie

(vgl Buch S. 71)

Z_1 und Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt.

Wir wollen einsehen, dass dann auch

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$$

standard-normalverteilt ist.

Dafür gibt es ein wunderschönes geometrisches Argument.

Sei $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^2$.

Wir fassen das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf

als die Koordinaten des zufälligen Vektors

$$\vec{Z} = Z_1\vec{e}_1 + Z_2\,\vec{e}_2$$

und stellen fest:

- Z_1 ist die Koordinate von $\vec{Z}$ bgl. des Einheitsvektors $\vec{e}_1$.
- $\dfrac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$ ist die Koordinate von $\vec{Z}$ bgl. des Einheitsvektors

$$\vec{u}_{\text{diag}} := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2.$$

- Die Verteilung von $\vec{Z}$ ist rotationssymmetrisch

(siehe voriger Abschnitt)

Also ist Z_1 so verteilt wie $\frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{2}}$.

Und was dem Einheitsvektor $\vec{u}_{\text{diag}}$ recht ist,

ist jedem Einheitsvektor $\vec{u} = \tau_1\vec{e}_1 + \tau_2\vec{e}_2$ billig !

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und N(0, 1)-verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$Y := \tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2$ ist N(0, 1)-verteilt.

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + Z_2 \vec{e}_2$

zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2$.)

Eine wichtige Folgerung hieraus:

Die Summe von

unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen

ist wieder normalverteilt.

Denn:

$$(\sigma_1 Z_1 + \mu_1) + (\sigma_2 Z_2 + \mu_2) = (\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2) + (\mu_1 + \mu_2),$$

und

$$\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_2 \right)$$

ist N$(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-verteilt.

Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^n$

(vgl. Buch S. 71)

In Teil 3 der heutigen Vorlesung formulierten wir den

Satz über die Unabhängigkeit von ZV'en mit Dichten

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i, \;\; i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

Dazu passt die folgende Situation:

Sei $Z := (Z_1, \ldots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \ldots, Z_n$ sind unabhängig und N(0, 1)-verteilt

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|a|^2}{2}\Big)\, da\ , \quad a \in \mathbb{R}^n\ ,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Die Dichte der Standard-Normalverteilung auf $\mathbb{R}^n$ ist rotationssymmetrisch. Analog zum Fall $n = 2$ gilt deshalb:

Ist $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^n$ und sind $\tau_1, \dots, \tau_n$ reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$, dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \cdots + \tau_n Z_n$ N$(0, 1)$-verteilt.

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \cdots + Z_n \vec{e}_n$ zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \cdots + \tau_n \vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}} \quad \text{ist N}(0, 1)\text{-verteilt.}$$