

# Vorlesung 6b

## Die Normalverteilung

### Teil 3: Dichten von Produktform

Für diskrete Zufallsvariable  
war die Unabhängigkeit von  $X_1$  und  $X_2$   
äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Gewichte:

$$\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1) \rho_2(a_2).$$

Für Zufallsvariable mit Dichten  
ist die Unabhängigkeit von  $X_1$  und  $X_2$   
äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2) da_1 da_2 = f_1(a_1) da_1 f_2(a_2) da_2$$

Allgemeiner gilt der

**Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten**

$X_1, \dots, X_n$  seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \dots, f_n$  seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i)  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig,

und  $X_i$  hat die Dichte  $f_i(a_i) da_i, \quad i = 1, \dots, n.$

(ii)  $(X_1, \dots, X_n)$  hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) da_1 \dots da_n$$

Beispiel:

Die uniforme Verteilung  
auf dem Einheitsquadrat

$X_1, X_2$  seien unabhängig und uniform verteilt auf  $[0, 1]$ .

Dann hat  $(X_1, X_2)$  die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1) da_1 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2) da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1] \times [0,1]}(a_1, a_2) da_1 da_2,$$

und ist somit uniform verteilt auf  $[0, 1] \times [0, 1]$ .