Vorlesung 6b

Die Normalverteilung

Teil 2: Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}$ und ihre Schwestern $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Die folgende Definition beinhaltet

die wichtigste Verteilung der Stochastik:

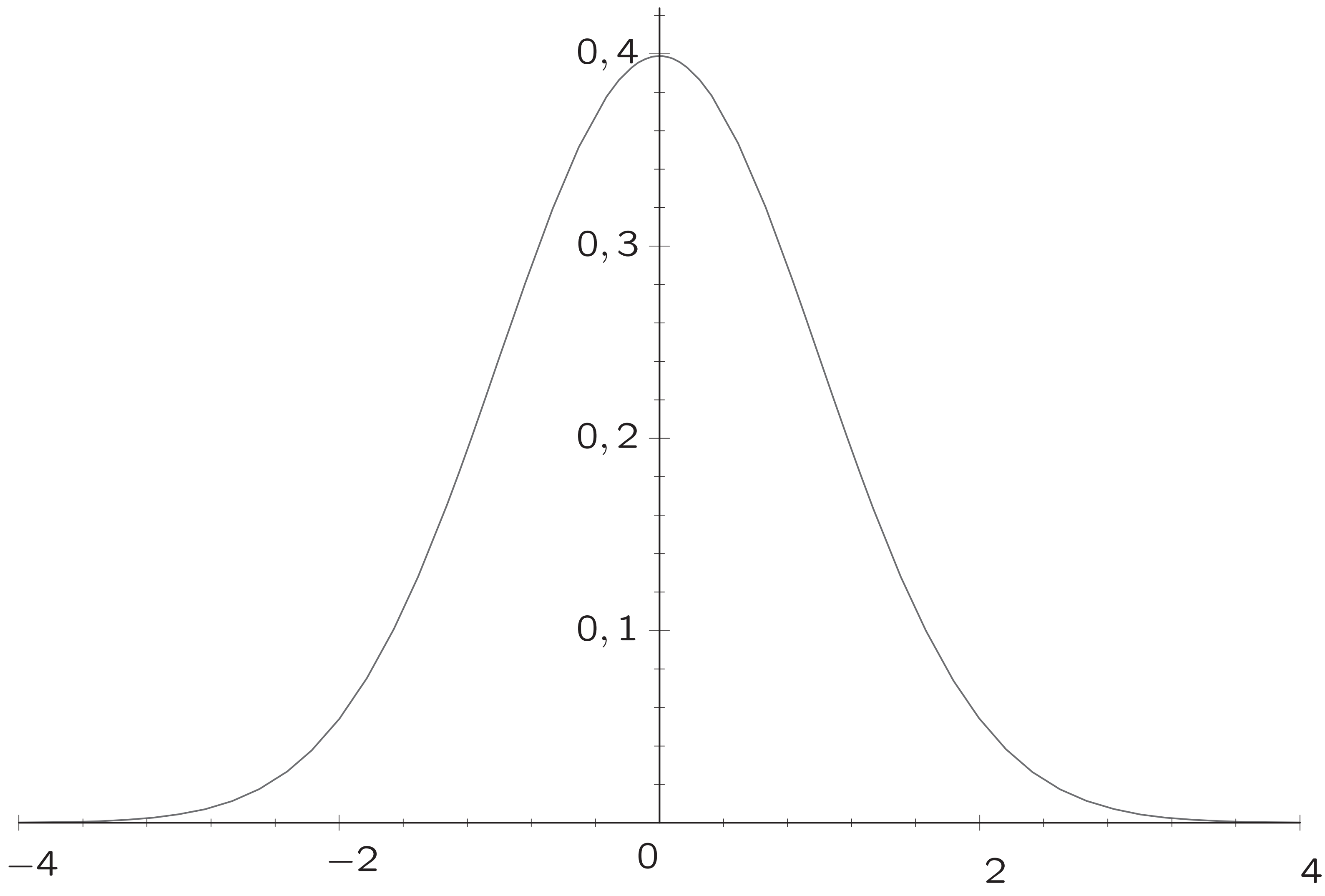
Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt.

Es gilt (siehe den Hinweis in A20
oder auch die erste Aufgabe auf S. 72 im Buch):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a)\,da = 1.$$


0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−4
−2
0
2
4

Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var}\,[Z] = 1.$$

Denn aus Symmetriegründen ist $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0,$

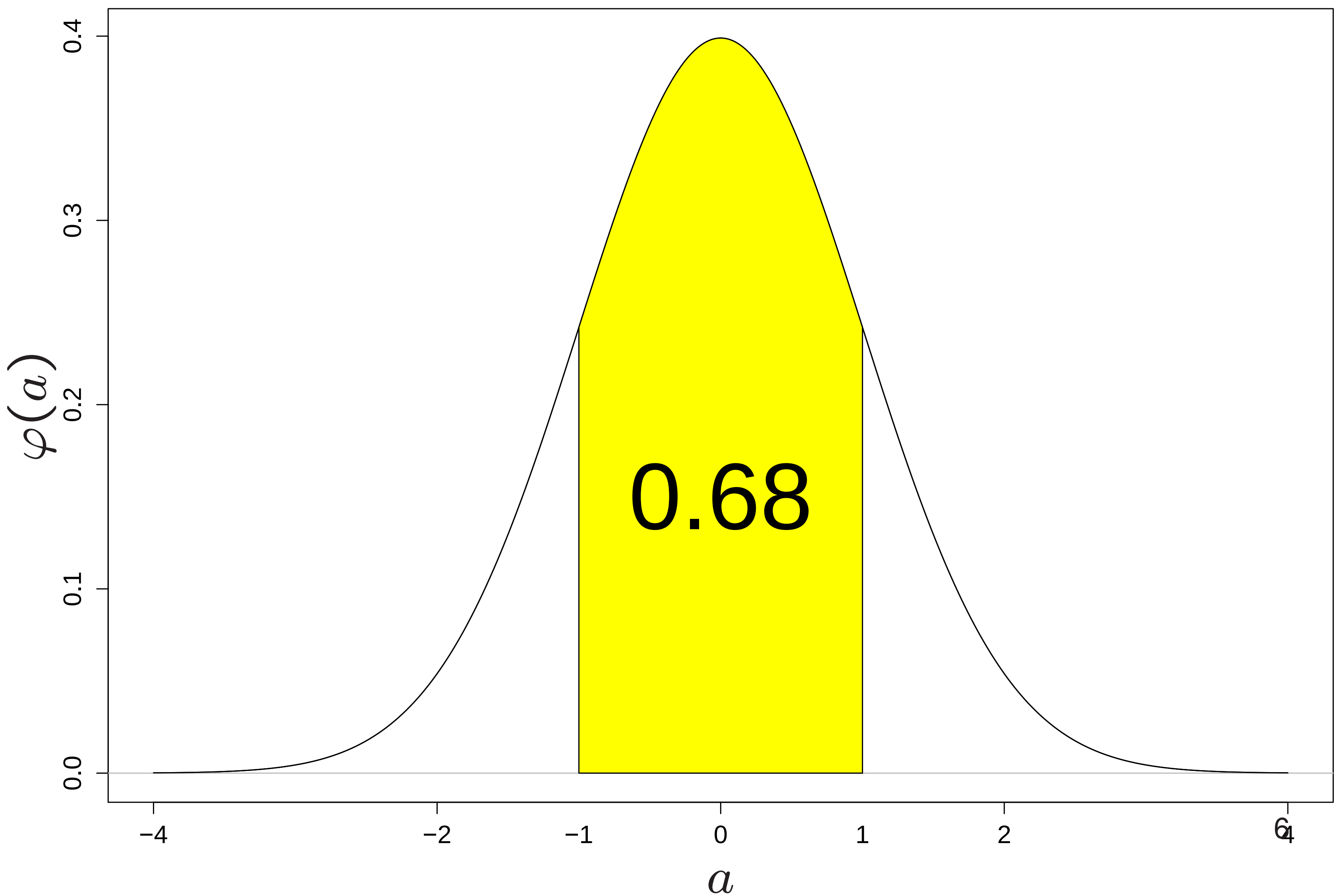
und mit partieller Integration bekommt man

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^2\, e^{-a^2/2}\, da = \int_{-\infty}^{\infty} a\, ae^{-a^2/2}\, da$$

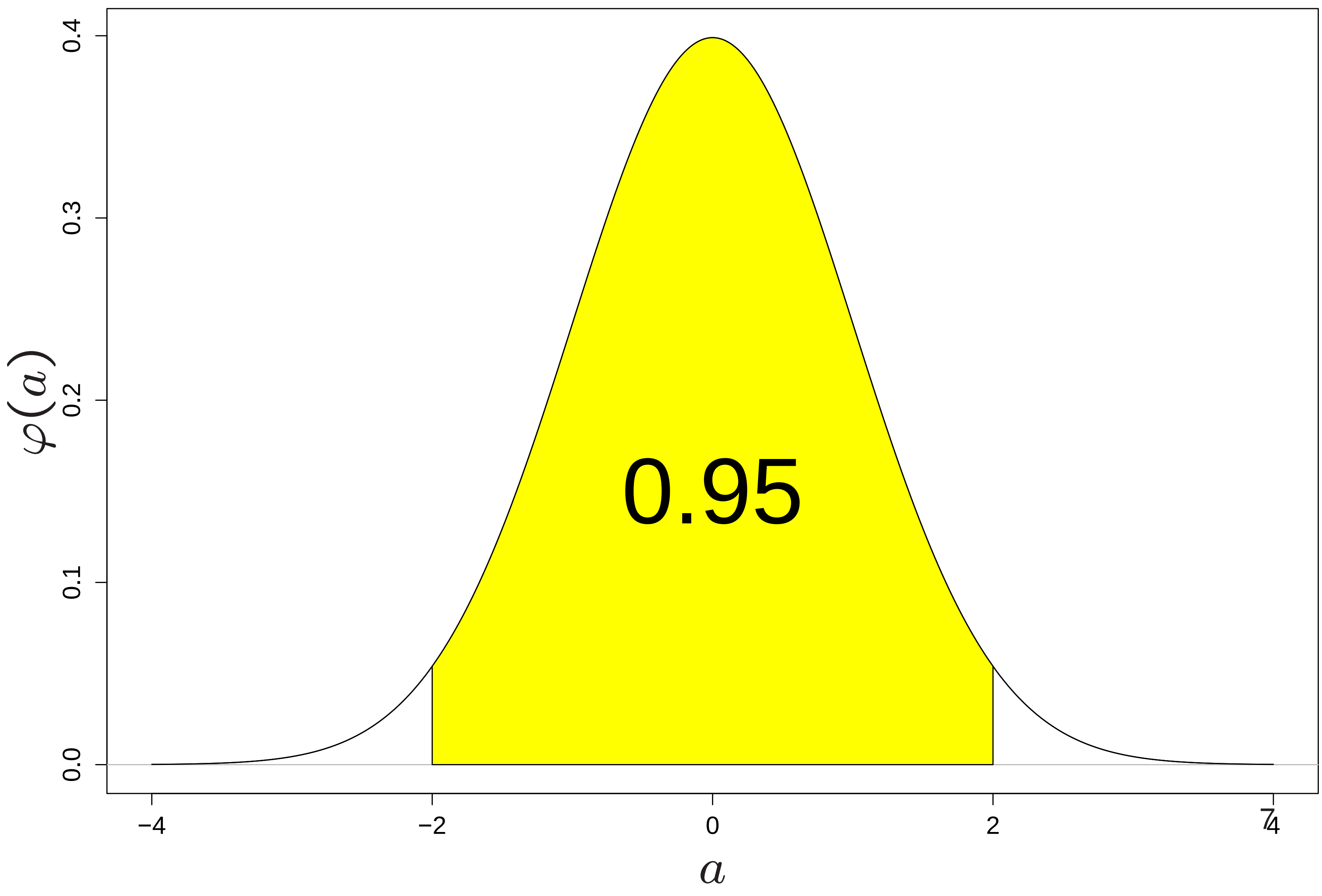
$$= -a\, e^{-a^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2/2}\, da = \sqrt{2\pi}.$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:

$\mathbf{P}(\,|Z| < 1) \approx 0.68$



$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$



$$\Phi(b) := \int_{-\infty}^{b} \varphi(a)\, da$$

ist die Standard-Normalverteilungsfunktion.

Es gibt für sie keinen expliziten analytischen Ausdruck

(der ohne die Formulierung als Integral bzw. Stammfunktion auskommt).

Der R-Befehl dafür ist `pnorm(b)` .

Die $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \ :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}\,[X] = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$ mit

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$

heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2,

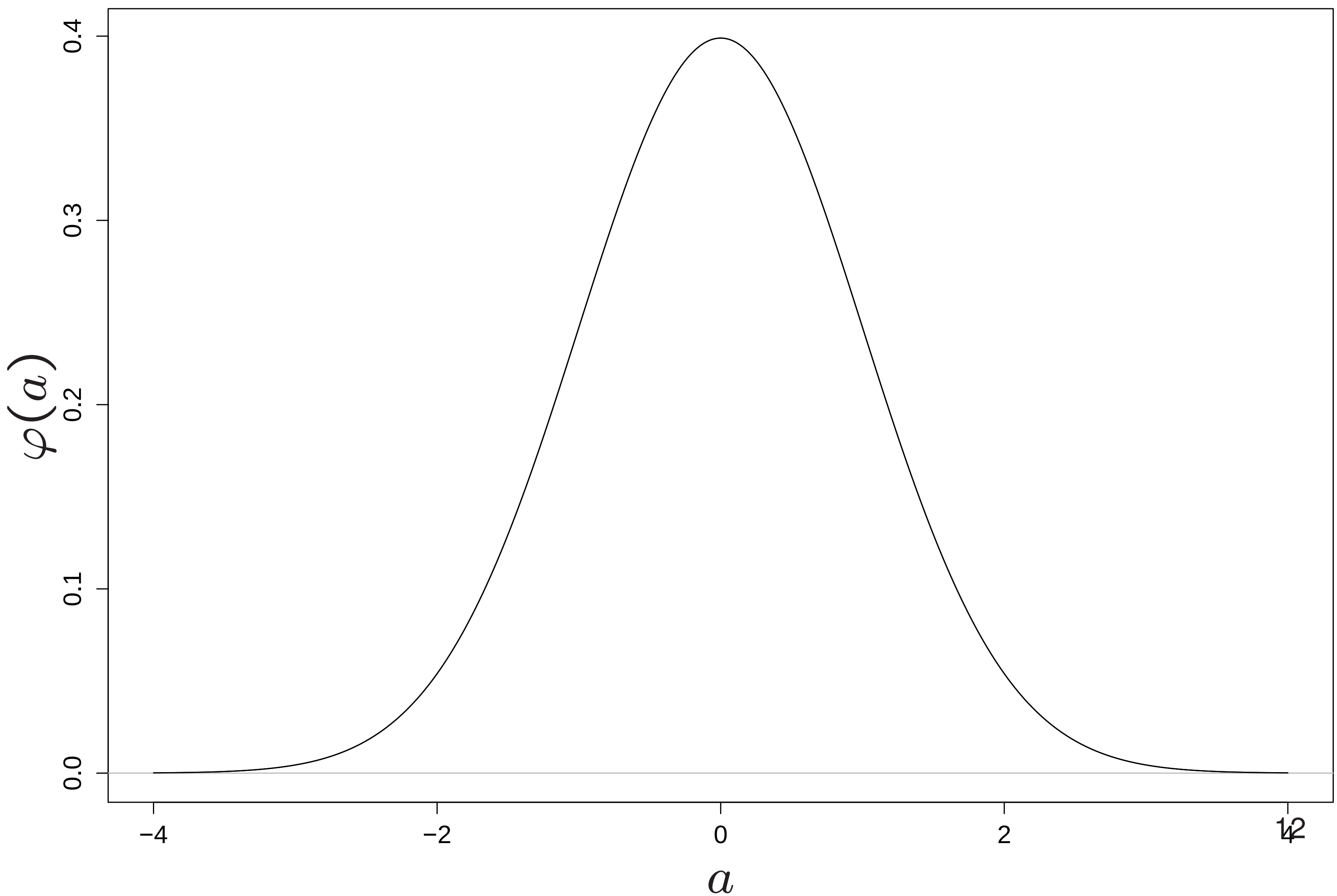
kurz

N(μ,σ^2)-verteilt.

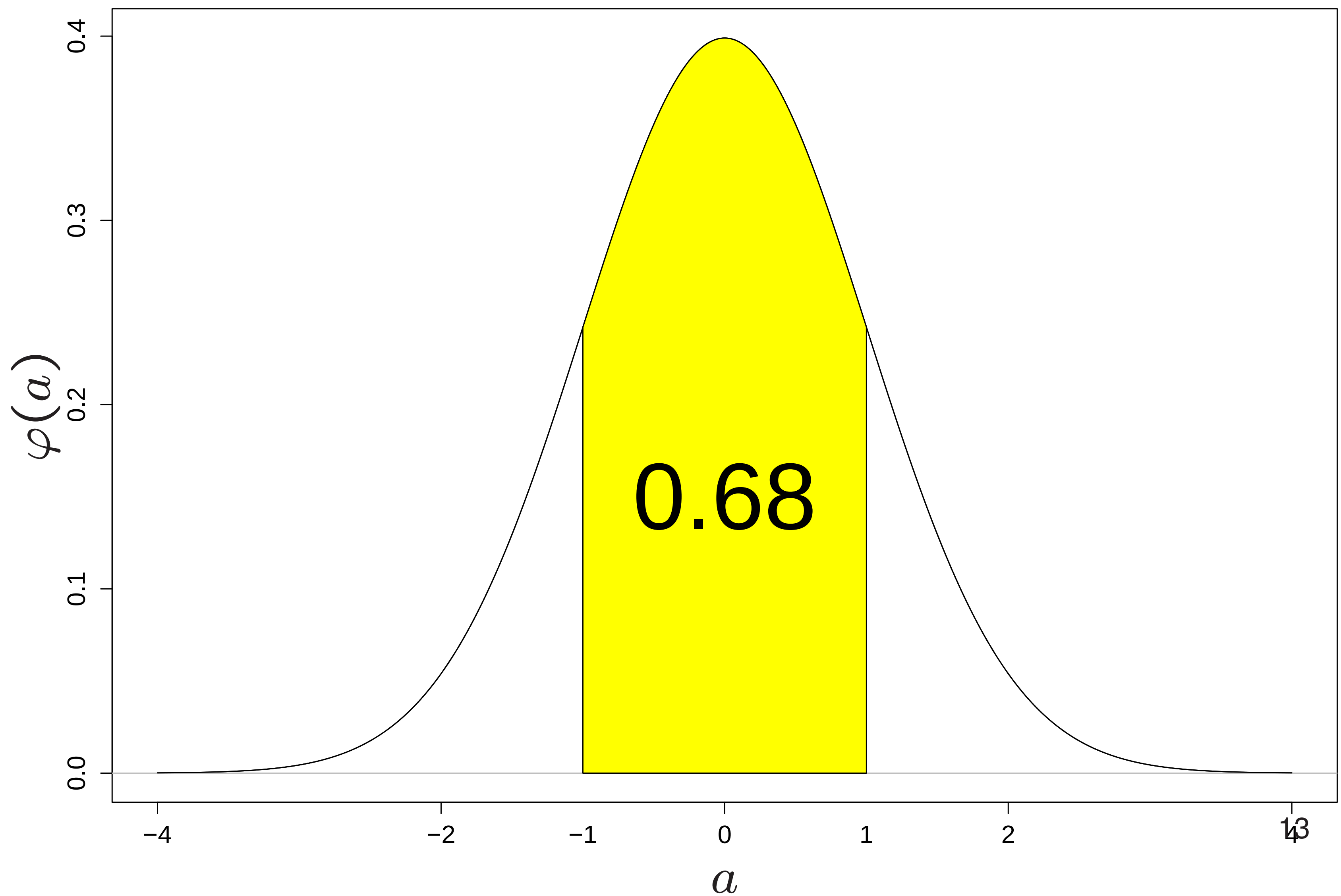
Ist Y N(μ,σ^2)-verteilt,

dann ist $\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ standard-normalverteilt.

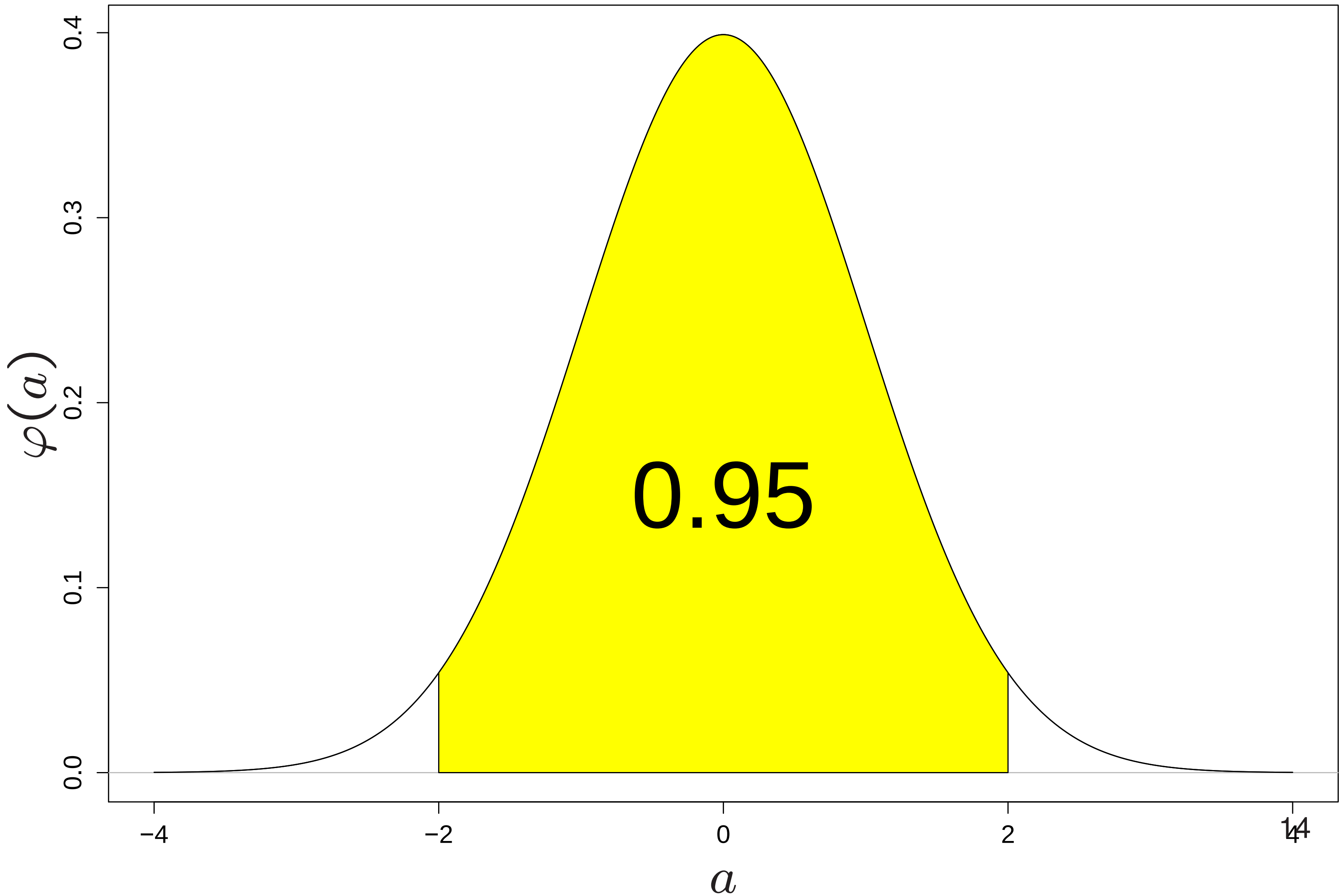
Dichtefunktion φ der Standard-Normalverteilung



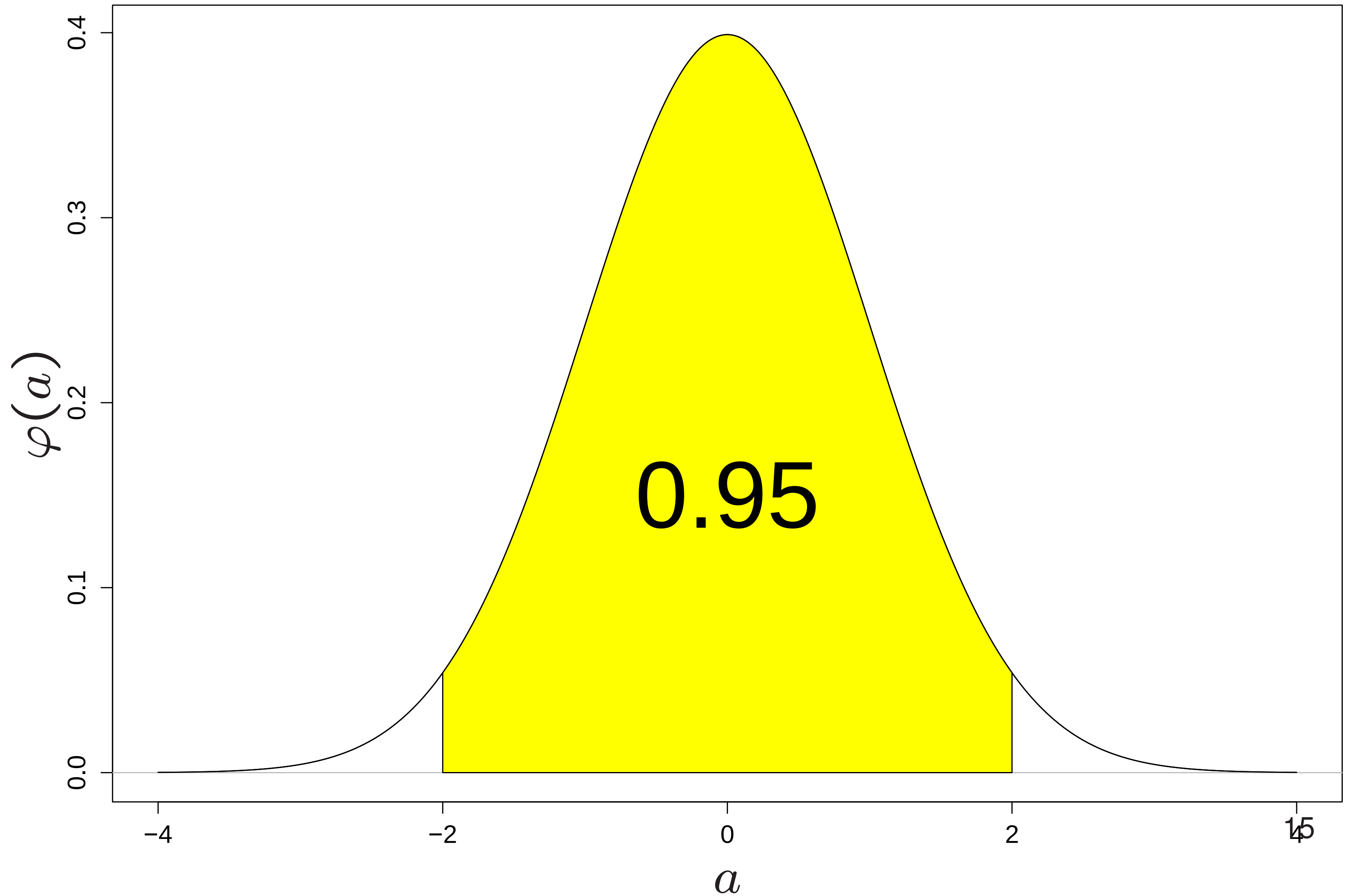
$$\mathbf{P}(\ |Z| < 1) \approx 0.68$$



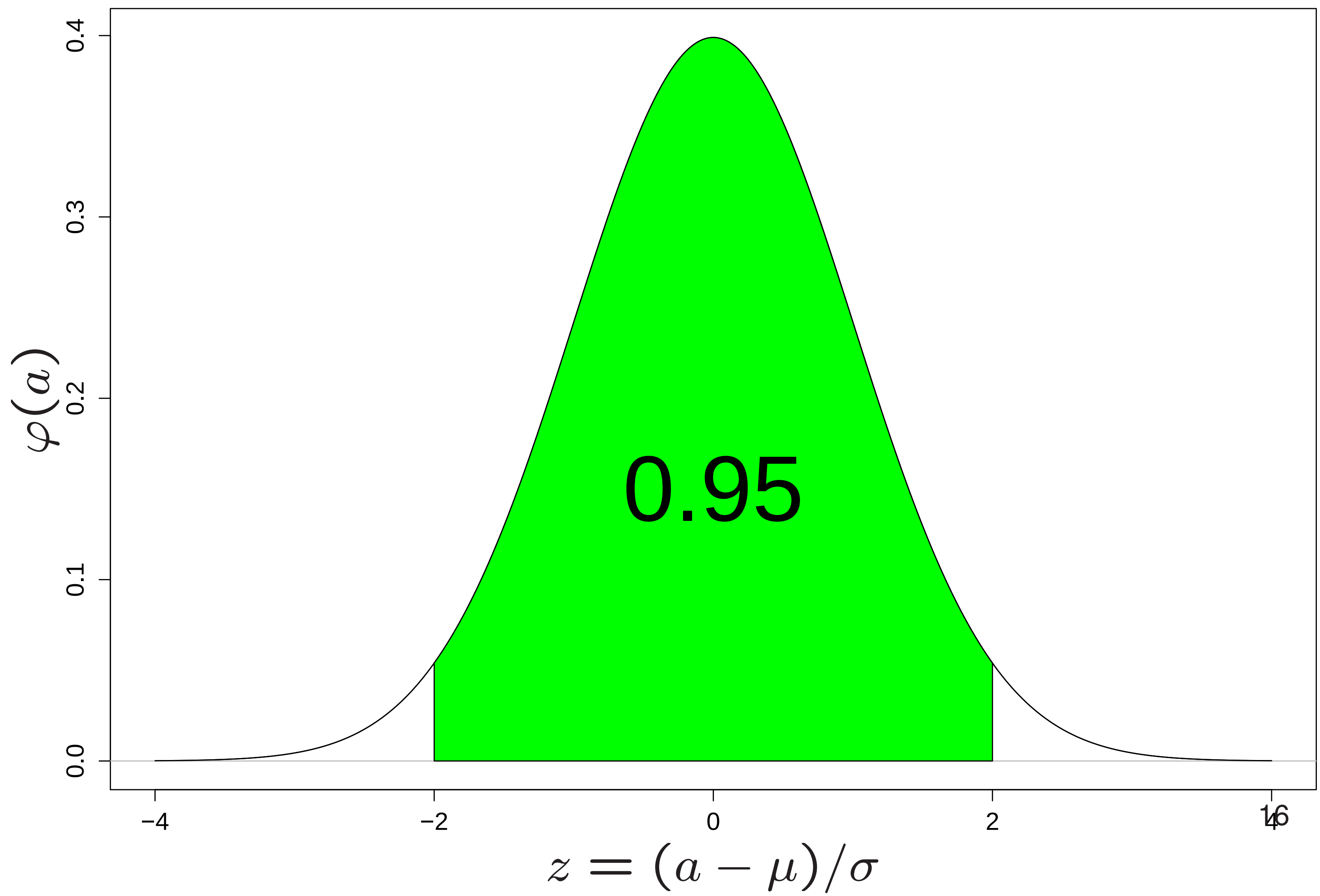
$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$



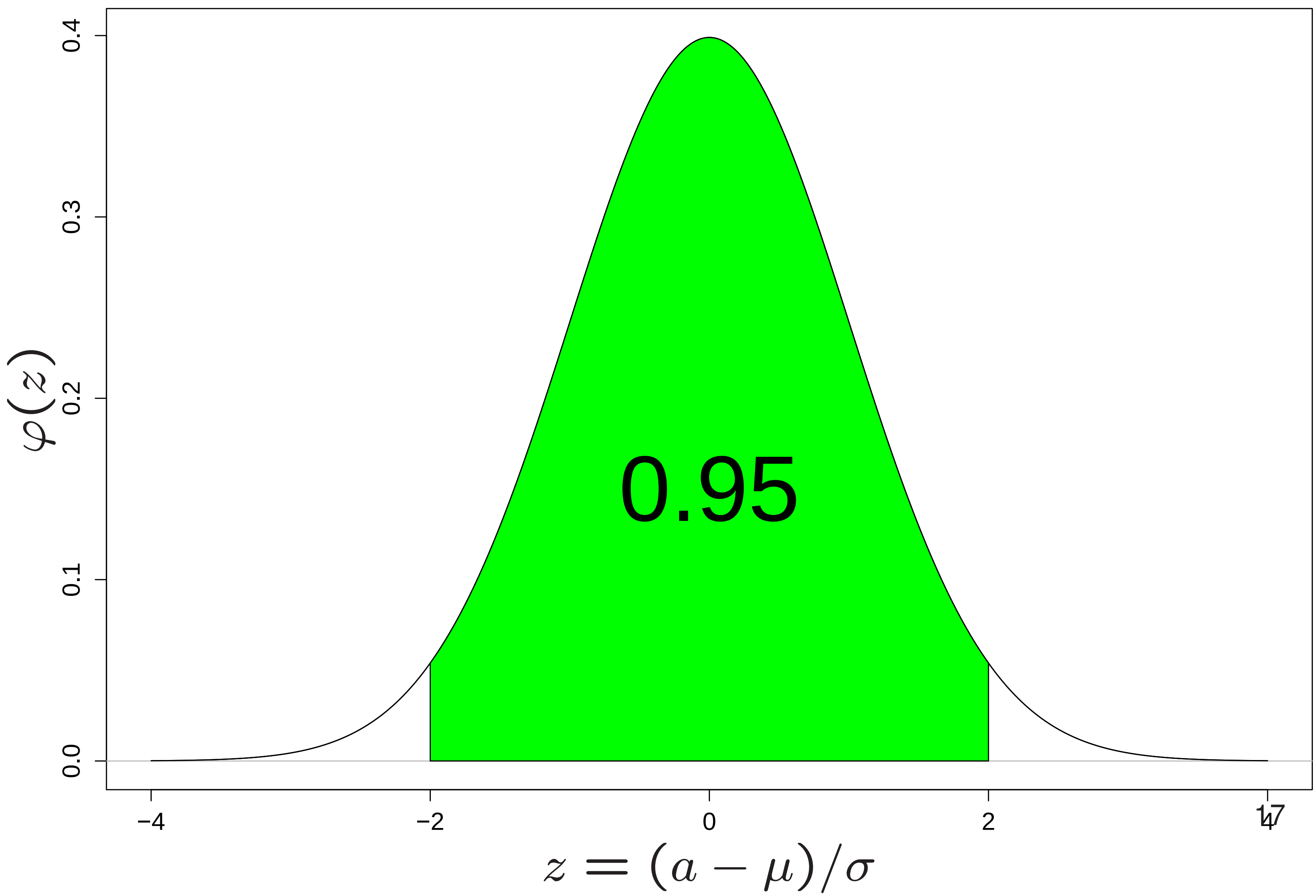
Und für N(μ, σ)-verteilte Zufallsgrößen X?

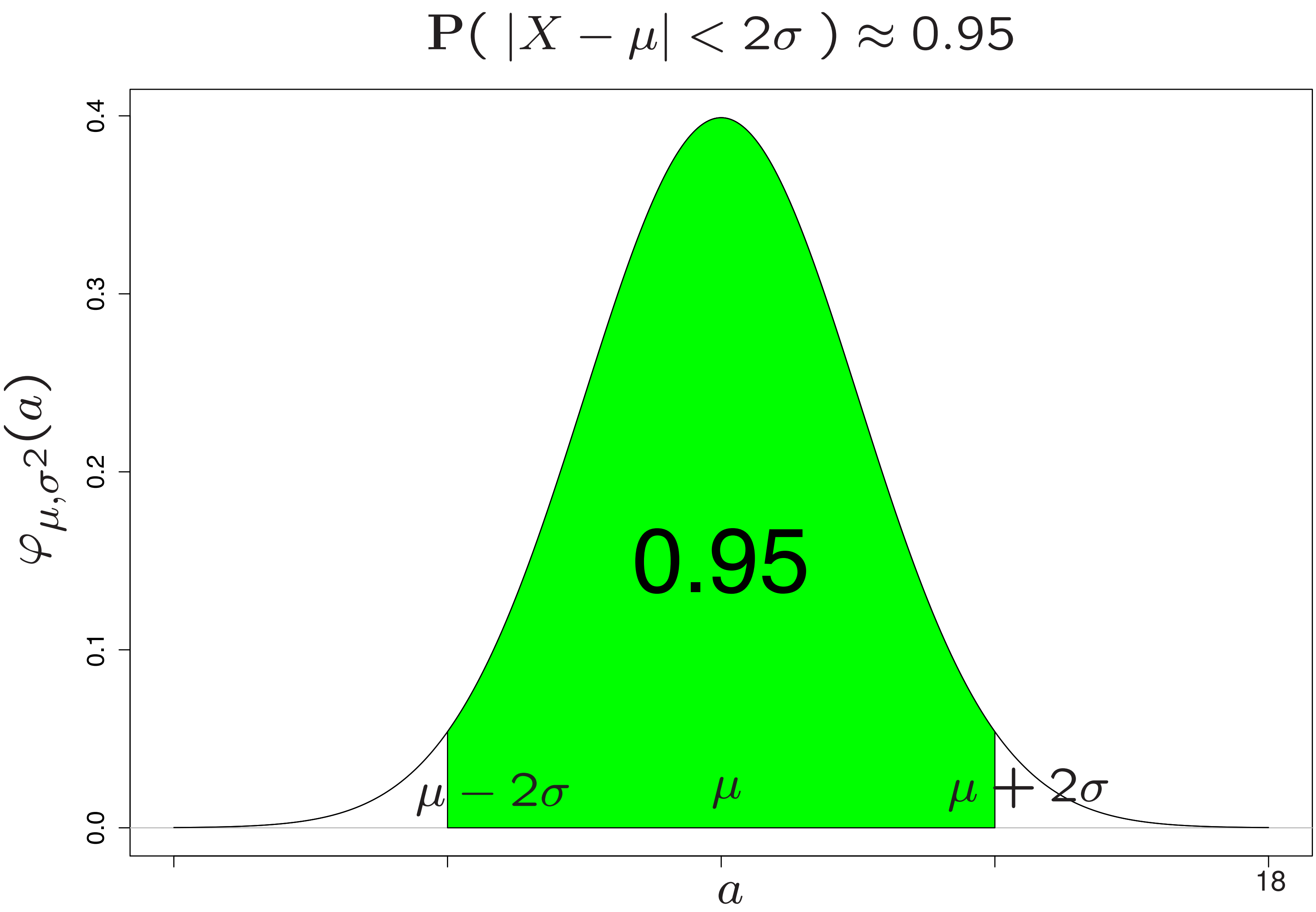


Dasselbe in grün.



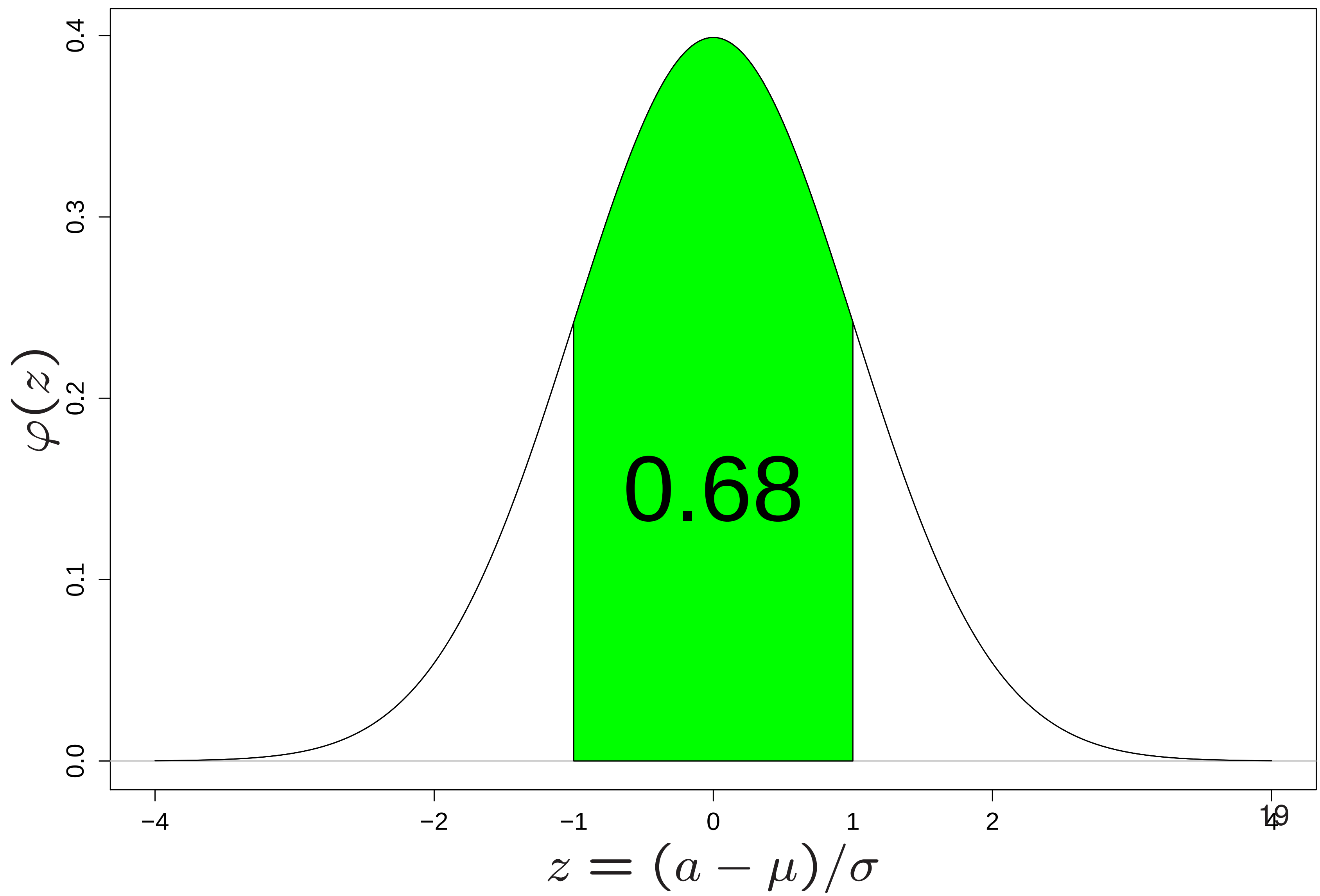
$\mathbf{P}(\ |X-\mu|/\sigma < 2\ ) \approx 0.95$

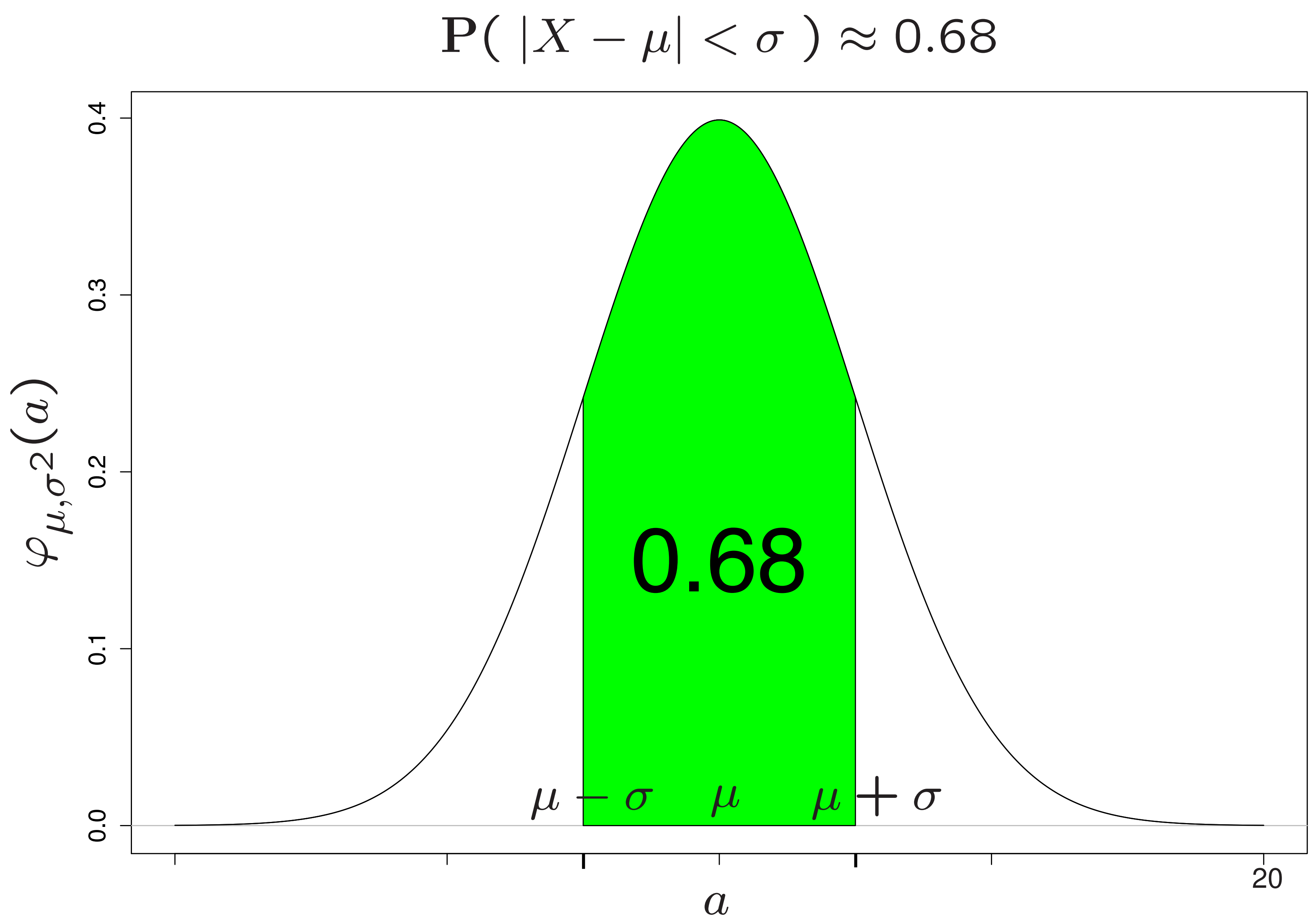




$\mathbf{P}(\ |X-\mu|<2\sigma\ )\approx 0.95$
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
$\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)$
0.95
$\mu-2\sigma$
μ
$\mu+2\sigma$
a
18

$$\mathbf{P}(\ |X-\mu|/\sigma < 1\ ) \approx 0.68$$




$\mathbf{P}(\ |X-\mu|<\sigma\ )\approx 0.68$
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
$\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)$
0.68
$\mu-\sigma$
μ
$\mu+\sigma$
20
a

Approximation der Gewichte der Binomialverteilung

durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$:

Sei X_n Binomial(n, p)-verteilt. Dann gilt (siehe Teil 1):

$$\mathbf{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(k) \approx \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \varphi_{\mu,\sigma^2}(a)da$$

$$\approx \mathbf{P}(k - \tfrac{1}{2} \leq X \leq k + \tfrac{1}{2})$$

für eine N(μ, σ^2)-verteilte ZV'e X.