

Vorlesung 6a

Varianz und Kovarianz

Teil 4

Umrechnungen von $\text{Var}[X]$,
Varianz der Poissonverteilung

(Buch S. 24, 29)

Manchmal hilfreich ist die Formel:

$$(1) \quad \text{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2$$

Beweis:

$$\mathbf{E}[(X - \mu)^2] = \mathbf{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

$$= \mathbf{E}[X^2] - 2\mu\mathbf{E}[X] + \mu^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mu^2$$

(wegen Linearität des Erwartungswertes)

Gleich werden wir dann diese Formel verwenden:

$$(2) \quad \text{Var}[X] = \mathbf{E}[X(X - 1)] - (\mathbf{E}[X])^2 + \mathbf{E}[X]$$

(2) folgt aus (1) durch Subtrahieren und Addieren von $\mathbf{E}[X]$,
und wegen:

$$\mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X^2 - X] = \mathbf{E}[X(X - 1)].$$

Zur Erinnerung:

Die Poissonverteilung mit Parameter λ
entsteht als Grenzwert von Binomialverteilungen mit

$$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda.$$

Weil dann npq gegen λ konvergiert,
steht zu vermuten:

Die Varianz einer $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen X ist λ .

Beweis durch Rechnung:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2.\end{aligned}$$

Nach der obigen Formel (2) gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[X] &= \mathbf{E}[X(X-1)] - (\mathbf{E}[X])^2 + \mathbf{E}[X] = \\ &\quad \lambda^2 - \lambda^2 + \lambda. \quad \square\end{aligned}$$