Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 7

Produktmaße

Im ganzen Abschnitt seien

$(S_1, \mathscr{S}_1)$ und $(S_2, \mathscr{S}_2)$ messbare Räume.

Die von der Kollektion der messbaren Produktmengen

$$\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathscr{S}_1,\ A_2 \in \mathscr{S}_2\}$$

auf $S_1 \times S_2$ erzeugte σ-Algebra heißt

die Produkt-σ-Algebra auf $S_1 \times S_2$ (Symbol: $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$).

Satz über das Produkt zweier Maße

m_1 und m_2 seien Maße auf $(S_1, \mathscr{S}_1)$ bzw. $(S_2, \mathscr{S}_2)$.

Dann exisitiert genau ein Maß auf $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$

(Symbol $m_1 \otimes m_2$) mit der Eigenschaft

$$(m_1 \otimes m_2)(A_1 \times A_2) = m_1(A_1) m_2(A_2),$$
$$A_1 \in \mathscr{S}_1, A_2 \in \mathscr{S}_2.$$

In differentieller Notation:

$$(m_1 \otimes m_2)(d(a_1, a_2)) = m_1(da_1) m_2(da_2),$$
$$a_1 \in S_1, a_2 \in S_2.$$

Dieser Satz hat Relevanz in den beiden folgenden Situationen:

1. X_1 und X_2 seien S_1-bzw. S_2-wertige Zufallsvariable mit Verteilung ρ_1 bzw. ρ_2. Dann gilt:

X_1 und X_2 sind unabhängig genau dann, wenn (X_1, X_2) die Verteilung $\rho_1 \otimes \rho_2$ hat.

Mit der Schreibweise

$$\mathbf{P}((X_1, X_2) \in d(a_1, a_2)) := \mathbf{P}(X_1 \in da_1, X_2 \in da_2)$$

wird das zur Äquivalenz:

X_1 und X_2 sind unabhängig $\Longleftrightarrow$

$$\mathbf{P}(X_1 \in da_1, X_2 \in da_1) = \mathbf{P}(X_1 \in da_1)\mathbf{P}(X_2 \in da_2)$$

2. $(S_1, \mathscr{S}_1, m_1)$ und $(S_2, \mathscr{S}_2, m_2)$ seien beide gleich $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$.

Dann ergibt sich mit den Definitionen aus V5a6:

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathscr{B} \times \mathscr{B}, \lambda \otimes \lambda) = (\mathbb{R}^2, \mathscr{B}^2, \lambda^2)$$

Der Charme des Lebesgueintegrals entfaltet sich
nicht zuletzt bei Produktmaßen:
die Integrationsreihenfolge darf nach Belieben vertauscht werden:

Ist g nichtnegativ und messbar (bzg. $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$) und sind m_1 und m_2 Maße auf $(S_1, \mathscr{S}_1)$ bzw. $(S_2, \mathscr{S}_2)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_1 \times S_2} g(a_1, a_2))(m_1 \otimes m_2)(d(a_1, a_2)) \\
&= \int_{S_1} \left(\int_{S_2} g(a_1, a_2) m_2(da_2) \right) m_1(da_1) \\
&= \int_{S_2} \left(\int_{S_1} g(a_1, a_2) m_1(da_1) \right) m_2(da_2)
\end{aligned}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist wieder

$(S_1, \mathscr{S}_1, m_1) = (S_2, \mathscr{S}_2, m_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$.

Die $\mathbb{R}^2$- wertige Zufallsvariable (X_1, X_2)

habe die Dichte $f(a_1, a_2)\, da_1 da_2$,

und h sei nichtnegativ und $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$- messbar

bzw. integrierbar.

Die Transformationsformel (V5a6, F11) wird dann zu

$$\mathbf{E}[h(X_1, X_2)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(a_1, a_2) f(a_1, a_2)\, da_1 da_2.$$

Die folgende Beobachtung ist ein kontinuerliches Analogon zu dem auf Folie 10/11 in Teil 1 festgestellten Kriterium für die Unabhängigkeit zweier diskreter Zufallsvariabler:

Es sei ρ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}^2)$ mit Dichte:

$$\rho(d(a_1, a_2)) = f(a_1, a_2)d(a_1, a_2).$$

Die Bildmaße von ρ unter den Abbildungen $(a_1, a_2) \mapsto a_1$ bzw. $(a_1, a_2) \mapsto a_2$ bezeichnen wir mit ρ_1 und ρ_2.

Genau dann gilt $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$, wenn f_1, f_2 existieren mit

$$f(a_1, a_2)d(a_1, a_2) = f(a_1)da_1\, f_2(a_2)da_2.$$