

Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 5

Unabhängige Teilbeobachtungen abhängiger Inputs

(vgl. Buch S. 68, Bsp. 1)

Sind X_1 und X_2 unabhängig,

dann auch $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$.

Denn:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(h_1(X_1) \in B_1, h_2(X_2) \in B_2) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1), X_2 \in h_2^{-1}(B_2)) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1)) \mathbf{P}(X_2 \in h_2^{-1}(B_2)) \\ &= \mathbf{P}(h_1(X_1) \in B_1) \mathbf{P}(h_2(X_2) \in B_2). \quad \square \end{aligned}$$

Durch den Übergang zu
“Teilbeobachtungen” $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$
können aber auch aus abhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2
voneinander unabhängige Zufallsvariable
 $h_1(X_1), h_2(X_2)$ entstehen:

Gewisse **Teilaspekte** von **abhängigen Zufallsvariablen**
können **unabhängig** sein:

Beispiel:

(X_1, X_2) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \dots, 32\}$ ”.

Offenbar sind X_1 und X_2 nicht unabhängig.

Aber: die Ereignisse

$$E_1 := \{X_1 \in \{1, 9, 17, 25\}\}, \quad E_2 := \{1 \leq X_2 \leq 8\}.$$

sind **unabhängig**.

Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \frac{1}{8}, \mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{1 \cdot 7 + 3 \cdot 8}{32 \cdot 31} = \frac{1}{32}.$$

Als Anknüpfung an Abschnitt 0 der heutigen Vorlesung geben wir hier
auch noch die Tafel der 4 Wahrscheinlichkeiten

$P(E_1 \cup E_2)$, $P(E_1 \cup E_2^c)$, $P(E_1^c \cup E_2)$, $P(E_1^c \cup E_2^c)$:

	E_2	E_2^c
E_1	$\frac{1 \cdot 7 + 3 \cdot 8}{32 \cdot 31}$	$\frac{1 \cdot 24 + 3 \cdot 23}{32 \cdot 31}$
E_1^c	$\frac{7 \cdot 7 + 21 \cdot 8}{32 \cdot 31}$	$\frac{7 \cdot 24 + 21 \cdot 23}{32 \cdot 31}$

Man sieht: Die Zeilen stehen im Verhältnis 1 : 7,
die Spalten stehen im Verhältnis 1 : 3.

Das kommt daher, dass der relative Anteil von A_1 in A_2 ebenso groß ist
wie der von A_1 in A_2^c .