Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 6

Messbare Mengen, Maße und integrierbare Funktionen

Dieser “Appendix ad libitum”
zu unserem Einstieg in die “Elementare Stochastik des Kontinuums”
ist gedacht als Schnellkurs der Maß und Integrationstheorie
für alle, die daran Spaß haben.

So gesehen ist
der Übertitel “Zufallsvariable mit Dichten” dieses Teiles untertrieben:
es wird ein Rahmen bereitgestellt,
der sowohl den diskreten als auch den kontinuerlichen Fall umfasst.

Beweise zu den folgenden Aussagen findet man u.a. im hübschen Buch
Maß und Integral von M. Brokate und G. Kersting, Birkhäuser, 2019.

Die σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$

Mit $\mathscr{I}$ bezeichnen wir die Kollektion aller Intervalle in $\mathbb{R}$.

Der Durchschnitt aller σ-Algebren auf $\mathbb{R}$, die $\mathscr{I}$ enthalten (also die *kleinste* $\mathscr{I}$ umfassende σ-Algebra) heißt σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$, Symbol $\mathscr{B}$.
(Man nennt $\mathscr{B}$ kurz die *von* $\mathscr{I}$ *auf* $\mathbb{R}$ *erzeugte* σ*-Algebra* .)

Ganz analog definiert man die σ-Algebren $\mathscr{B}_+$, $\overline{\mathscr{B}}$ und $\overline{\mathscr{B}}_+$ auf $[0,\infty)$, $[-\infty,\infty]$ und $[0,\infty]$.

Das Lebesguemaß λ auf $\mathbb{R}$

Für $A \in \mathscr{I}$ sei $\lambda(A)$ die *natürliche Länge* von A, d.h.

$$\lambda([l, r]) = r - l \quad \text{für } l \leq r.$$

Mit dem Fortsetzungssatz von Caratheodory zeigt man:

Die natürliche Länge lässt sich auf eindeutige Weise zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ fortsetzen. Man nennt dieses das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, Symbol λ oder λ^1.

Messbare Abbildungen:

Seien $(S, \mathscr{S})$ und $(S', \mathscr{S}')$ messbare Räume (vgl. V4a6).

Eine Abbildung $g : S \to S'$ heit ($\mathscr{S}$-$\mathscr{S}'$)-messbar, wenn

$g^{-1}(A') \in \mathscr{S}$ für alle $A' \in \mathscr{S}'$ gilt.

Eine $\mathscr{S}$-$\mathscr{B}$-messbare Abbildung bezeichnen wir auch als

reellwertige messbare Funktion auf S.

Eine $\mathscr{S}$-$\overline{\mathscr{B}}_+$-messbare Abbildung bezeichnen wir auch als

nichtnegative messbare Funktion auf S.

Der Satz vom Integral:

Sei $(S, \mathscr{S}, m)$ ein Maßraum (vgl. V4a6).

Dann existiert genau eine Abbildung $h \to \int_S h\, dm$

von den reellwertigen messbaren Funktionen auf S

nach $[0, \infty]$ mit den drei Eigenschaften

(i) $\int_S \mathbf{1}_A\, dm = m(A)$ für $A \in \mathscr{S}$

(ii) $\int_S (h_1 + h_2)\, dm = \int_S h_1\, dm + \int_S h_2\, dm$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_S h_n\, dm = \int_S h\, dm$ falls $h_n(a) \uparrow h(a)\ \forall a \in S$.

Statt $\int_S h\, dm$ schreibt man auch $\int_S h(a)\, m(da)$

und spricht vom *Integral von h bzgl. m*.

Das Lebesgue-Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

Sei h eine nichtnegative messbare Funktion auf $\mathbb{R}$.

Statt $\int_{\mathbb{R}} h(a)\lambda(da)$ schreiben wir auch $\int_{\mathbb{R}} h(a)da$ und sprechen vom *Lebesgue-Integral von h*.

Ist h stückweise stetig, dann ist es auch messbar, und $\int_{\mathbb{R}} h(a)\lambda(da)$ ist gleich dem (uneigentlichen) Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} h(a)\,da$.

W-Maße mit Dichten bezüglich λ:

Sei f eine nichtnegative messbare Funktion auf $\mathbb{R}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(a)\lambda(da) = 1.$$

Dann definiert (dank des Satzes vom Integral)

$$\rho(A) := \int_A f(a)da := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(a)f(a)da, \quad A \in \mathscr{B},$$

ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$.

Wir nennen dieses ρ das W-Maß mit Dichte $f(a)da$, $a \in \mathbb{R}$.

Die W-Maße mit Dichte $f_1(a)da$ und $f_2(a)da$

stimmen genau dann überein, wenn gilt:

$$\lambda(\{a : f_1(a) \neq f_2(a)\}) = 0.$$

Das Integral bzgl. eines W-Maßes mit Dichte:

Sei ρ das W-Maß mit Dichte $f(a)da$, $a \in \mathbb{R}$, und

h eine nichtnegative messbare Funktion auf $\mathbb{R}$.

Dann gilt

$$\int h(a)\rho(da) = \int h(a)f(a)da.$$

Das Integral reellwertiger messbarer Funktionen

Sei $(S, \mathscr{S}, m)$ ein Maßraum

und h eine reellwertige messbare Funktion auf S.

In Analogie zu den Ausführungen in V3b3

(dort für den diskreten Fall) definiert man

$$h^+ := \max(h, 0), \quad h^- := -\min(h, 0)$$

und setzt

$$\int h(a)m(da) := \int h^+(a)m(da) - \int h^-(a)m(da)$$

falls nicht sowohl $\int h^+(a)m(da)$ als auch $\int h^+(a)m(da)$

gleich ∞ sind.

Die Transformationsformel für Integrale

Sei $(S, \mathscr{S}, \rho)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

und h eine reellwertige messbare Funktion auf S.

Das durch $\beta(B) := \rho(h^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}$,

definierte W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ heißt *Bildmaß von ρ unter h*

(oder auch *durch h auf $\mathbb{R}$ trasportiertes W-Maß*).

Genau dann existert $\int_S h(a)\rho(da)$,

wenn $\int_{\mathbb{R}} b\,\beta(db)$ exisitert.

In dem Fall sind diese beiden Integrale gleich.

Ist $\int_S |h(a)|\rho(da)$ endlich, dann nennt man h *ρ-integrierbar*.