

Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 5

Erwartungswert und Transformationsformel

Für diskrete reellwertige Zufallsvariable hatten wir

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \rho(a)$$

Das hat sein Analogon im Fall reellwertiger ZV'er mit Dichten:

Den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ entspricht die Dichte $f(a) da$.

Für diskrete reellwertige Zufallsvariable hatten wir

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \rho(a)$$

Das hat sein Analogon im Fall reellwertiger ZV'er mit Dichten:

Den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ entspricht die Dichte $f(a) da$.

Und aus der Summe wird ein Integral:

$$\mu = \mathbf{E}[X] = \int_l^r a f(a) da$$

Im Diskreten hatten wir für $h : S \rightarrow \mathbb{R}$
die Transformationsformel

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \rho(a).$$

Analog gilt im Fall mit Dichten:

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a) f(a) da$$

**Der Erwartungswert einer
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X :**

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

Mit partieller Integration

$$\int u v' = uv - \int u'v$$

ergibt sich

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

Also:

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = 1.}$$

Der Erwartungswert des Quadrates einer standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X :

$$\mathbf{E} [X^2] = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$$

Wieder mit partieller Integration:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also:

$$\boxed{\mathbf{E} [X^2] = 2.}$$

**Der Erwartungswert einer
Exp(α)-verteilten Zufallsvariablen Y :**

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\alpha} \mathbf{E}[\alpha Y] = \frac{1}{\alpha} \cdot 1,$$

weil αY Exp(1)-verteilt ist. Also

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\alpha}.$$