Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 4

Transformationen

A. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von $X := U^2$.

$$F_X(b) = \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b}), \quad 0 \leq b \leq 1.$$

$$\sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a)\, da, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{b}}, & 0 < b \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

B. Sei U uniform verteilt auf $[0,2]$. Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von $X := U^2$.

X hat Wertebereich $[0,4]$.

$$F_X(b) = \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b}) = \frac{1}{2}\sqrt{b}, \quad 0 < b \leq 4.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{b} \overset{!}{=} \int_0^b f(a)\,da, \quad 0 < b \leq 4.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{b}}, & 0 \leq b \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{ist Dichtefunktion von} X.$$

C. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(-\ln U \leq b)$$
$$= \mathbf{P}(U \geq e^{-b}) = 1 - e^{-b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a)\, da, \quad b \geq 0.$$

$$f(b) = \begin{cases} e^{-b}, & b \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von} X.$$

Zufallsvariable X mit der Eigenschaft

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \ \ b \geq 0,$$

sind uns schon (indirekt) begegnet bei der

Approximation der Verteilung von pT;

dabei war T Geom(p)-verteilt mit kleinem p.

Wir sprachen damals von der

Exponentialapproximation der geometrischen Verteilung,

siehe V4a.

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt

standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$b \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ 1 - e^{-b} & \text{für } b \geq 0. \end{cases}$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Dichte $e^{-a}\, da, \quad a \geq 0.$

Affin lineare Transformation:

X habe Verteilungsfunktion F_X.

Was ist dann die Verteilungsfunktion von $Y := \alpha X + \gamma$?

$$
\begin{aligned}
&F_Y(b)\\
&= \mathbf{P}(Y \le b) = \mathbf{P}(\alpha X + \gamma \le b)\\
&= \mathbf{P}(\alpha X \le b - \gamma) = \mathbf{P}\left(X \le \frac{b-\gamma}{\alpha}\right)\\
&= F_X\left(\frac{b-\gamma}{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

X habe Dichte $f_X(a)da$.

Was ist dann die Dichte von $Y := \alpha X + \gamma$?

Der Einfachheit halber nehmen wir an: Die Dichtefunktion f_X ist stückweise stetig. Dann ist in allen Stetigkeitspunkten

$$f_Y(b) = F'_Y(b) = F'_X\left(\frac{b-\gamma}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}$$

Die Dichte von Y ist somit $f_Y(b)\,db = f'_X\left(\frac{b-\gamma}{\alpha}\right)\frac{db}{\alpha}$

Zum Merken: Schlag nach beim Urbild,

und vergiss den Streckungsfaktor nicht!

Beispiel:

Ist X standard-exponentialverteilt,

dann hat $\frac{X}{\alpha}$ die Dichte

$$\alpha e^{-\alpha b} db, \quad b \geq 0.$$

Eine Zufallsvariable Y mit dieser Dichte heit

exponentialverteilt mit Parameter α, kurz Exp(α)-verteilt.

Merke: Ist Y Exp(α)-verteilt, dann ist αY Exp(1)-verteilt.