Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 2

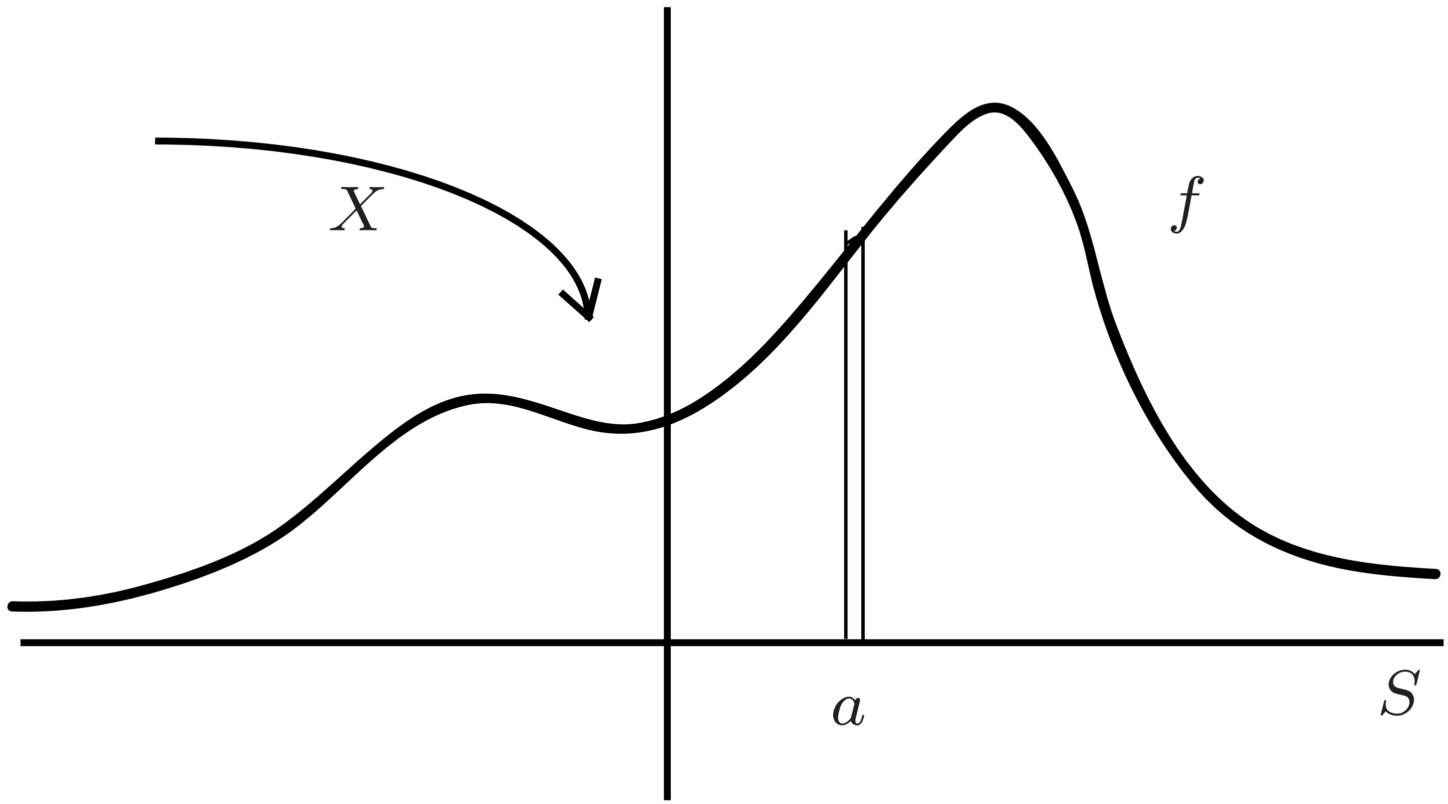
Dichten auf $\mathbb{R}$ bzgl des Längenmaßes

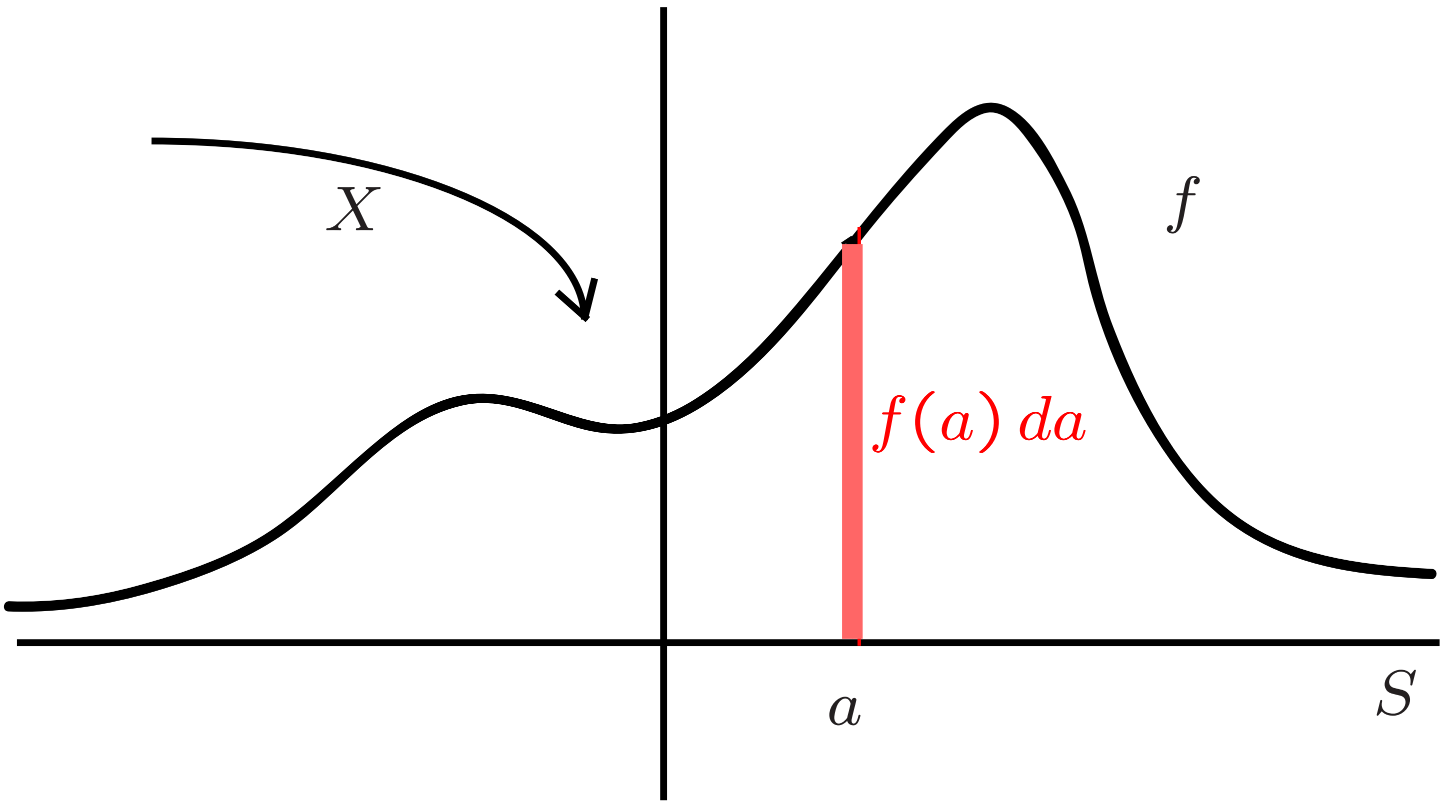
Sei S ein (offenes, abgeschlossenes oder halboffenes) Intervall
mit linker Grenze l und rechter Grenze r,
und X eine Zufallsvariable mit Wertebereich S, oder äquivalent dazu:
eine $\overline{\mathbb{R}}$- wertigeZufallsvariable, für die $\{X \in S\}$ das sichere Ereignis ist.
(Dabei ist $= -\infty$ und/oder $r = +\infty$ erlaubt.)

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur
mit *rein* zufälliger Wahl:
Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ ist jetzt
gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a)\,da$, wobei
$f : S \to \mathbb{R}_+$ eine (z.B.*) stückweise stetige Funktion ist mit

$$\int_l^r f(a)\,da = 1.$$

*Zum passenden Rahmen der Integrationstheorie siehe Teil 6


X
f
a
S



X
f
$f(a)\,da$
a
S

Sei X eine Zufallsvariable mit Wertebereich S.

Gilt für alle Intervalle $[b, c] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}\big(X \in [b, c]\big) = \int_b^c f(a)\, da \ ,$$

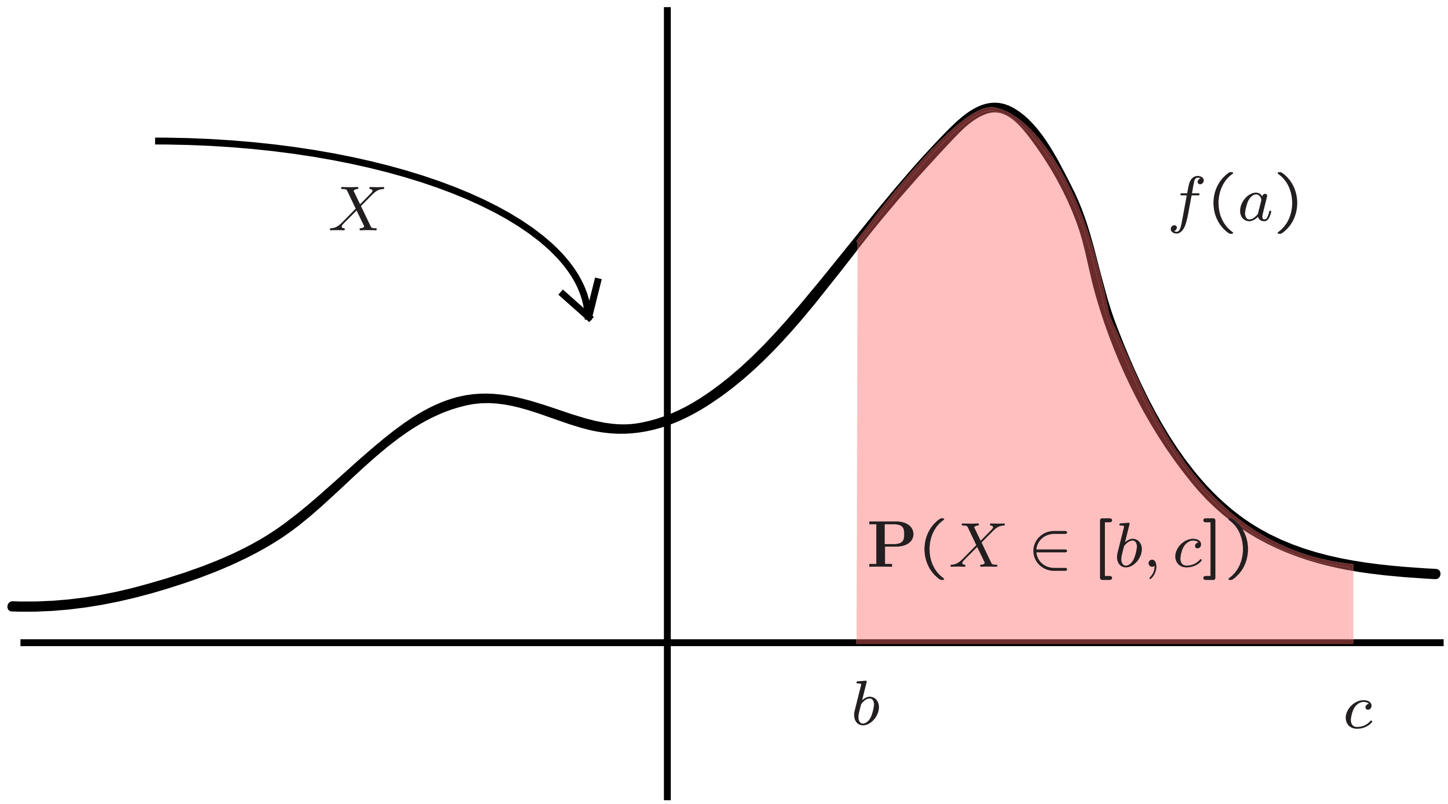
so sagten wir, dass

X die *Dichte* $f(a)\, da$ besitzt.

Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\, da \ , \quad a \in S \ ,$$

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X.


X
$f(a)$
$\mathbf{P}(X \in [b, c])$
b
c

Beispiele:

Eine auf dem Intervall $[0, 2]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{2}\, da, \;\; 0 \leq a \leq 2$.

Eine auf einem endlichen Intervall $S = [l, r]$

uniform verteilte Zufallsvariable

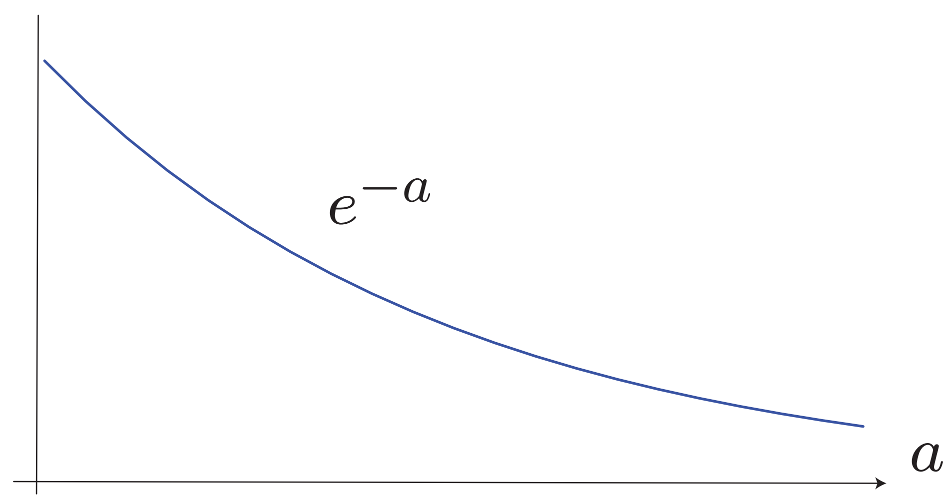
hat die Dichte $\dfrac{1}{r-l}\, da\ , \quad a \in S$.

Die Bedingung $\int_S f(a)\,da = 1$ kann auch erfüllt sein,

wenn S unendlichen Inhalt hat.

Man denke an das Beispiel

$$S = [0, \infty); \;\; f(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0.$$



Merke:

Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$

ist für jedes $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X = b) = \int_b^b f(a)\,da = 0.$$

Also gilt (mit naheliegender Schreibweise)

für $b \le c \in \mathbb{R}$:

$$\int_{(b,c]} f(a)\,da = \int_{[b,c]} f(a)\,da = \int_b^c f(a)\,da.$$

Tatsächlich hat man (z. B. für stückweise stetiges f) das Integral $\int\limits_A f(a)\, da$ nicht nur für Intervalle A, sondern für eine viel größere Klasse von “messbaren” Mengen” zur Verfügung - siehe Teil 6 dieser Vorlesung.

Außerdem gilt für paarweise disjunkte messbare Mengen $A_1, A_2, \ldots$ die “abzählbare Additivität” des Integrals:

$$\int\limits_{\bigcup A_i} f(a) da = \sum_i \int\limits_{A_i} f(a)\, da.$$

Das hierbei dienliche *Lebesgue-Integral* verallgemeinert den schon aus der Schule bekannten Integralbegriff, sodass Sie “für die Praxis” (und für die in der Vorlesung und den Übungen behandelten Beispiele) nicht umdenken müssen.

Hat die Zufallsvariable X eine Dichte, so gilt

für jede endliche oder abzählbar unendliche Menge A:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) = 0.$$

Insbesondere ist X dann nicht diskret.

Umgekehrt gilt also:

Eine diskrete Zufallsvariable besitzt keine Dichte

(im oben definierten Sinn).