Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable

Kontinuierlich anstelle von diskret:

Bisher hetten wir im Fokus der Vorlesung:

Diskrete Zufallsvariable.

Sie fallen mit W'keit 1 in eine diskrete

(d.h. endliche oder abzählbar unendliche)

Menge S.

Jetzt wenden wir uns Zufallsvariablen zu,

die kontinuierlich verteilt sind.

Dann ist der Wertebereich *überabzählbar*.

Ein prominentes Beispiel ist der (faire) Münzwurf.

Man kann ihn auffassen als

rein zufällige Wahl eines Elementes aus $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Ein weiteres einprägsames Beispiel ist die rein zufällige Wahl

eines Punktes aus dem Einheitsintervall

oder aus dem Einheitsquadrat.

Idee bei der rein zufälligen Wahl aus einem Kontinuum:

$\mathbf{P}(X \in A)$ ist gegeben durch den Anteil von A an S

Uniforme Verteilung auf dem Einheitsintervall

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $S = [0, 1]$ heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Längenmaß $\lambda(A)$

gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \lambda(A)$$

(denn hier ist ja $\lambda(S) = 1$).

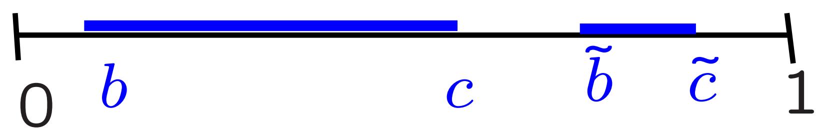
Beispiel 1:

$A := [b, c]$ mit $0 \le b \le c \le 1$

$$\mathbf{P}(X \in A) = c - b.$$

Beispiel 2:

$$A := [b, c] \cup [\tilde{b}, \tilde{c}] \quad \text{mit } 0 \leq b \leq c < \tilde{b} \leq \tilde{c} \leq 1$$



$$\mathbf{P}(X \in A) = (c - b) + (\tilde{c} - \tilde{b}).$$

Beispiel 3:

$$A := \{a\} \quad \text{mit } 0 \leq a \leq 1$$

$$\mathbf{P}(X = a) = a - a = 0.$$

Uniforme Verteilung auf einem Rechteck in $\mathbb{R}^2$:

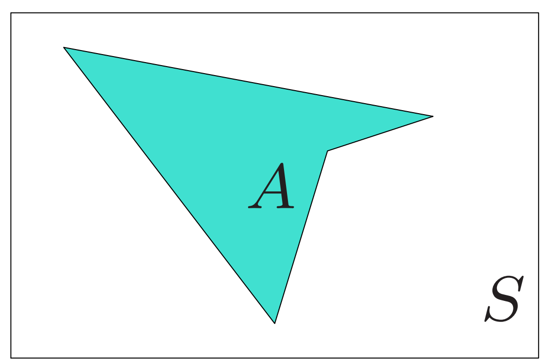
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

heißt *uniform verteilt auf* S, wenn

für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Flächenmaß $\lambda^2(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\lambda^2(A)}{\lambda^2(S)} = \frac{\lambda^2(A)}{\ell \cdot b}.$$



Uniforme Verteilung auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^d$

Definition (Buch S. 12)

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $\lambda^d(S) > 0$.

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich S heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem (Volums-)Inhalt

$v(A) := \lambda^d(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{v(A)}{v(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{v(A)}{v(S)}.$$

Man beachte die Analogie zu

“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”:

Der zahlenmäßige Anteil von A

an einem endlichen Wertebereich S

wird jetzt ersetzt durch den volumsmäßigen Anteil von A

am (überabzählbar) unendlichen Wertebereich S.

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das anschauliche Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{v(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{v(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück da (um den Punkt a)

und rechts als dessen (infinitesimaler) Inhalt da.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{v(S)}.$$

Diese Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\int_A \frac{da}{v(S)} = \frac{v(A)}{v(S)}.$$

$$\int_A \mathbf{P}(X \in da) := \mathbf{P}(X \in A)$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{v(S)}, \quad a \in S$$

ist gleichbedeutend mit

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{v(A)}{v(S)}$$ für alle “messbaren” $A \subset S$.