Vorlesung 4b

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 5

Das p-Münzwurfmaß auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

Wir schließen an den letzten Teil aus Vorlesung 4a
und den ersten Teil der heutigen Vorlesung an.

Sei $p \in (0, 1)$, und $Z = (Z_1, Z_2, \ldots)$ eine p-Münzwurffoge
(auch bekannt als *Bernoulli-Folge* zum Parameter p).
Der Wertebereich $S := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ von Z
ist unendlich - und sogar überabzählbar!

Für gewisse "interessante" Teilmengen $A \subset S$
haben wir die Maßzahlen $\rho(A)$ festgelegt,
nämlich für Teilmengen A der Gestalt

$$A = \{(a_1, \ldots, a_n)\} \times \{0,1\}^{n+1,n+2,\ldots} \qquad (*)$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \{0,1\}, \;\; i = 1, \ldots, n$:

$$\rho(A) := p^k(1-p)^{n-k}, \quad \text{mit } k := a_1 + \cdots + a_n. \quad (*).$$

Durch Addieren dieser Gewichte bekommen wir

$\rho(A)$ für alle A der Form

$$A = A_n \times \{0,1\}^{n+1,n+2,\ldots} \;\; \text{mit} \;\; A_n \subset \{0,1\}^n \qquad (**)$$

Diese Definiton war konsistent in dem Sinn, dass sie
für zwei verscheidene Darstellungen ein-und derselben Menge A
dieselbe Maßzahl $\rho(A)$ liefert.

Als Korollar zum Fortsetzungssatz von Caratheodory (s.u.)

bekommt man den

Satz p-MWM über die Existenz und Eindeutigkeit

des p-Münzwurfmaßes:

Sei $\mathfrak{Z}$ die Kollektion aller Teilmengen von S der Form $(**)$,

$\mathscr{S} :=$ die kleinste σ-Algebra auf S, die $\mathfrak{Z}$ enthält.

Es existiert genau ein durch $(**)$ festgelegtes

W-Maß ρ auf $(S, \mathscr{S})$.

Dieses ρ nennen wir das p-Münzwurfmaß auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,

oder auch die Verteilung des (fortgesetzen) p-Münzwurfes.

In der Maßtheorie beweist man den

Fortsetzungssatz von Caratheodory (1918)

Sei S irgendeine nichtleere Menge und $\mathfrak{Z}$ eine Kollektion von Teilmengen von S mit den Eigenschaften

(i) $A_1, A_2 \in \mathfrak{Z} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{Z}$

(ii) $A \in \mathfrak{Z} \Longrightarrow S \setminus A \in \mathfrak{Z}$

(iii) $S \in \mathfrak{Z}$.

Sei $\rho : \mathfrak{Z} \to [0, 1]$ additiv mit $\rho(S) = 1$ und mit der

Stetigkeitseigenschaft in $\emptyset$:

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \in \mathfrak{Z} \text{ mit } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho\left(A_n\right) = 0.$$

Dann lässt sich ρ auf eindeutige Weise zu einem W-Maß auf der kleinsten, $\mathfrak{Z}$ enthaltenden σ-Algebra auf S fortsetzen.

Hier ist noch die Beweisskizze des obigen Satzes p-MWM:

Wegen Caratheodory bleibt nur zu zeigen, dass

für $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ der Form $(**)$

und ρ wie in $(*)$

die Stetigkeitseigenschaft in $\emptyset$ gilt. Nach dem Satz von

Tychonov ist S kompakt in der Produkttopologie.

Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nun eine absteigende Folge

kompakter Mengen mit leerem Durchschnitt,

also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $A_{n_0} = \emptyset$.

Daraus folgt $\rho\left(A_{n_0}\right) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \rho(A_n) = 0$. $\square$

Zusammenfassung des Wichtigsten aus V4b:

1. Im p-Münzwurf gilt: $\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n)$

$$= p^k(1-p)^{n-k}, \quad a_1 + \dots + a_n = k.$$

2. Im p-Münzwurf ist die Wartezeit auf den ersten Erfolg

Geom(p)-verteilt: $\mathbf{P}(T > n) = q^n$.

3. Für kleine p gilt: $\mathbf{P}\left(\frac{T}{\mathbf{E}[T]} > t\right) \approx e^{-t}$

4. Für kleine p und große n ist die Anzahl der Erfolge

in n Versuchen approximativ Pois(np)-verteilt.

Für eine Pois(λ)-verteilte Zufallsvariable gilt:

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$