

Vorlesung 4b

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 3

Die Exponentialapproximation.

Oder:

Münzwurf mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie lange dauert es bis zum ersten Erfolg?

(Buch S. 42)

Wieder sei

T

der zufällige Zeitpunkt des ersten Erfolgs
in einem fortgesetzten p -Münzwurf.

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) = q^{2000} = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{2000} \approx e^{-2}$$

$$\mathbf{P}(T > 2 \cdot \mathbf{E}[T]) \approx e^{-2}$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{T}{\mathbf{E}[T]} > 2\right) \approx e^{-2}$$

Betrachten wir T *auf der Skala seines Erwartungswertes*:

$$\tilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Für $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{T} > t\} &= \mathbf{P}\left(T > \frac{t}{p}\right) = \mathbf{P}\left(T > \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor\right) \\ &= (1 - p)^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor} \\ &= (1 - p)^{\frac{1}{p}} p^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor} \end{aligned}$$

Betrachten wir T auf der Skala seines Erwartungswertes:

$$\tilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Für $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{T} > t\} &= \mathbf{P}\left(T > \frac{t}{p}\right) = \mathbf{P}\left(T > \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor\right) \\ &= (1-p)^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor} \\ &= (1-p)^{\frac{1}{p}} p^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor} \end{aligned}$$

Für $p \rightarrow 0$ konvergiert dies gegen

$$(e^{-1})^t = e^{-t}.$$

Diese Tatsache formulieren wir als einen *Grenzwertsatz*:

(vgl. Buch S. 42)

Satz Sei T_1, T_2, \dots eine Folge von geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}[T_m] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty.$$

Dann gilt für jedes $t \geq 0$:

$$\mathbf{P} \left(\frac{T_m}{\mathbf{E}[T_m]} > t \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^{-t}$$