

# Vorlesung 4b

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 2

Der Zeitpunkt des ersten Erfolgs  
und die geometrische Verteilung

(Buch S. 34-35)

$$T := \min\{i : i \in \mathbb{N}, Z_i = 1\}$$

ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges.

Wie sieht die Verteilung von  $T$  aus?

$$\mathbf{P}(T = n) = ?$$

$$\{T = n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1\}$$

Also:

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1)$$

$$= q^{n-1} p.$$

$$\mathbf{P}(T = n) = ?$$

$$\{T = n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1\}$$

Also:

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1)$$

$$= q^{n-1} p.$$

Alternativ:

$$\{T > n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_n = 0\}$$

Also

$$\mathbf{P}(T > n) = q^n.$$

$$\mathbf{P}(T = n) = q^{n-1} p$$

$$\mathbf{P}(T > n) = q^n$$

Das passt zusammen.

Denn das Ereignis  $\{T > n - 1\}$  ist die disjunkte Vereinigung der beiden Ereignisse  $\{T = n\}$  und  $\{T > n\}$ .

Dementsprechend:

$$q^{n-1} = q^{n-1} p + q^n.$$

## Definition

Sei  $p \in (0, 1)$ . Eine Zufallsvariable  $T$  mit Zielbereich  $\mathbb{N}$  heißt

*geometrisch verteilt* mit Parameter  $p$ ,

kurz **Geom( $p$ )-verteilt**,

wenn

$$\mathbf{P}(T > a) = q^a, \quad a = 0, 1, 2, \dots,$$

mit  $q := 1 - p$ .

$$\mathbf{E}[T] = ?$$

Anschaulich ist klar:

Beim gewöhnlichen Würfeln kommt im Mittel  
jedes 6-te Mal eine Sechs.

Beim Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$   
kommt im Mittel jedes  $(1/p)$ -te Mal ein Erfolg.

Also wird gelten:

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}.$$

Das beweist man auch schnell  
mit dem folgenden

Fubini-**Lemma** zum Erwartungswert  $\mathbb{N}$ -wertiger ZV'er:  
(Buch S. 34)

Ist  $X$  eine Zufallsvariable mit Zielbereich  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{N}_0$ , dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$

Folgerung aus dem Lemma:

Für eine  $\text{Geom}(p)$ -verteilte Zufallsvariable  $T$  ist

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(T > i) = \sum_{i \geq 0} q^i = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{p}.$$

$$\boxed{\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}}$$

## Lemma

Ist  $X$  eine Zufallsvariable mit Zielbereich  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{N}_0$ , dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$

*Beweis.*

$\rho(j)$  seien die Verteilungsgewichte von  $X$ .

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden rechten Seiten gleich?

*Beweis.*

$\rho(j)$  seien die Verteilungsgewichte von  $X$ .

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden rechten Seiten gleich?

*Beweis.*

$\rho(j)$  seien die Verteilungsgewichte von  $X$ .

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j) = \sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden rechten Seiten gleich?

*Beweis.*

$\rho(j)$  seien die Verteilungsgewichte von  $X$ .

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j) = \sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden **rechten Seiten** gleich?

*Beweis.*

$\rho(j)$  seien die Verteilungsgewichte von  $X$ .

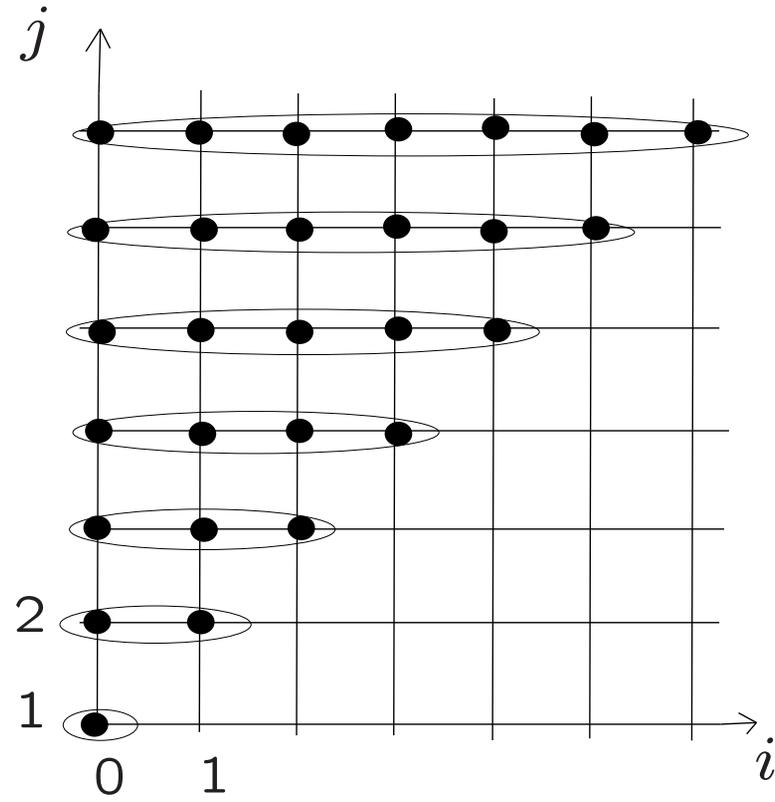
$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j) = \sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

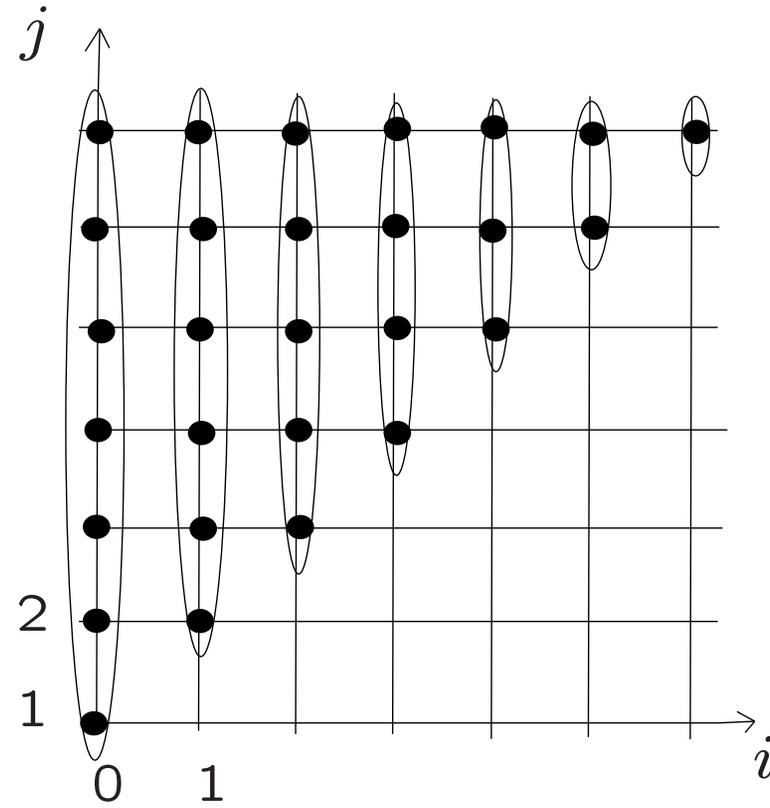
Warum ist das gleich?

Wie sieht man die Gleichheit

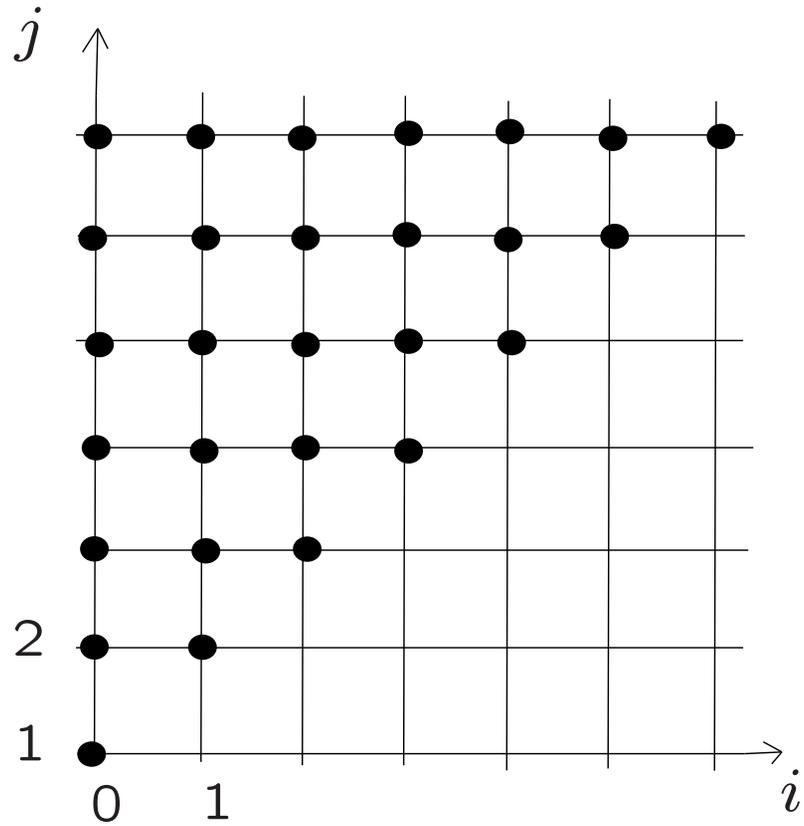
$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j) \quad ?$$



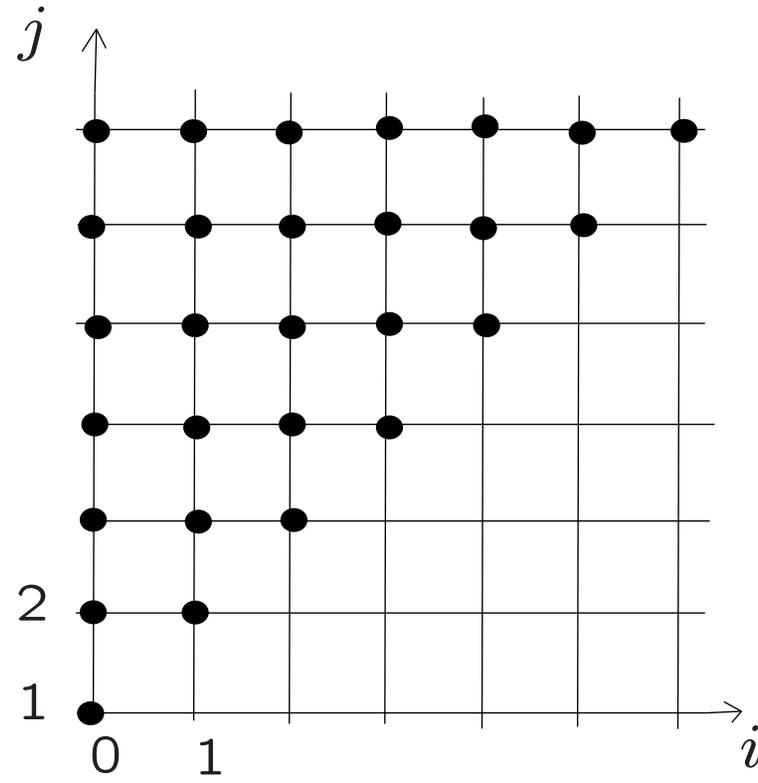
$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j)$$



$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$



Es kommt nicht auf die Reihenfolge  
der Summation an



$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j) \quad \square$$