Vorlesung 4b

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Die Welt des p-Münzwurfs - von Bernoulli zu Poisson

Teil 1

Der fortgesetze p-Münzwurf

(Buch S. 19-20)

Zur Erinnerung:

Der n-fache p-Münzwurf ...

$\ldots$ ist eine $\{0,1\}^n$-wertige ZV'e $(Z_1, \ldots, Z_n)$

mit

$$(*) \qquad \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n) = p^k (1-p)^{n-k}$$

falls $a_1 + \cdots + a_n = k$.

Ereignisse kann man oft auf verscheidene Weise darstellen.

Für einen $(n+1)$-fachen p-Münzwurf gilt z.B.

$$
\begin{aligned}
&\{Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n\} \\
&\quad = \{Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1\} \\
&\qquad \cup \{Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0\}
\end{aligned}
$$

Weil rechts zwei disjunkte Ereignisse stehen, muss gelten:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n) \\
&\quad = \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1) \\
&\qquad + \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0)
\end{aligned}
$$

Die Definition $(*)$ auf der vorigen Folie ist damit verträglich:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n) \\
&\qquad = \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1) \\
&\qquad\qquad + \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p^k (1-p)^{n-k} \\
&\qquad = p^{k+1} (1-p)^{n-k} \\
&\qquad\qquad + p^k (1-p)^{n-k+1}
\end{aligned}
$$

Dies zeigt, dass auch die folgende Definition

konsistent über n ist.

Definition: Sei $p \in (0,1)$, $\quad q := 1-p$.

Eine *Bernoulli-Folge zum Parameter p*

(man sagt manchmal auch: ein *fortgesetzter p-Münzwurf*)

ist eine zufällige 01-Folge $(Z_1,\ Z_2,\ldots)$, deren Verteilung die

folgende Eigenschaft hat:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede endliche 01-Folge $(a_1,\ldots,a_n)$

mit k Einsen und $n-k$ Nullen ist

$$\mathbf{P}(Z_1 = a_1,\ldots,Z_n = a_n) = p^k q^{n-k}.$$

(d.h. für jedes n ist $(Z_1,\ldots,Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf)

Wir wissen schon:

Für jedes n ist dann

die Anzahl der Einsen in $(Z_1, \ldots, Z_n)$

(die “Anzahl der Erfolge in n Versuchen”)

binomial(n, p)-verteilt:

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$