# Vorlesung 4a

# Indikatorvariable

## Rechnen mit Ereignissen und

## Wahrscheinlichkeiten.

**Teil 6**

Das Mengenmodell der Stochastik

Manche Lehrbücher der der Stochastik

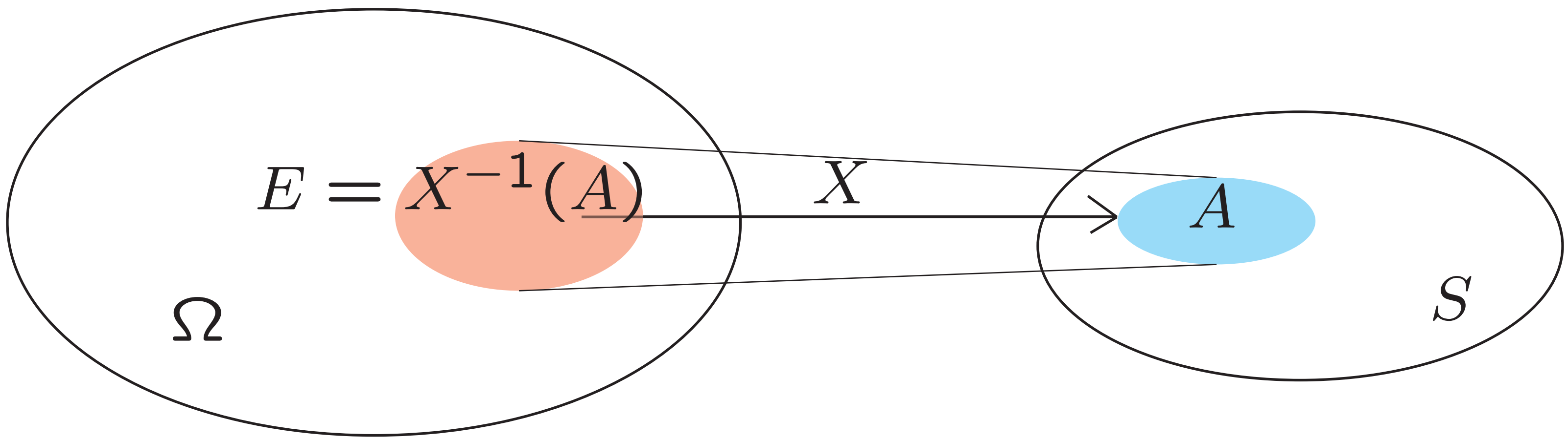
(und auch manche Schulbücher)

verstehen unter *Ereignissen* $E$ nichts anderes als

Teilmengen einer nichtleeren Menge $\Omega$.

Das hat seinen Rahmen im sogenannten

**Mengenmodell der Stochastik:**




In diesem Modell werden Zufallsvariable $X$ zu

Abbildungen von $\Omega$ auf ihren Wertebereich $S$.

Die Urbilder $\{X \in A\} := X^{-1}(A)$

(mit bestimmten Teilmengen $A$ von $S$) sind dann

*von $X$ erzeugte Ereignisse*.

Weil es für überabzählbare Mengen $S$ (und $\Omega$)

zuviel verlangt ist, *alle* Teilmengen

auf abzählbar additive Weise messen zu wollen,

beschränkt man sich auf *gewisse* Systeme von Teilmengen:

Definition:

Ein System $\mathscr{A}$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge $M$

heißt $\sigma$*-Algebra auf* $M$,

wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $M \in \mathscr{A}$

(ii) $T \in \mathscr{A} \Longrightarrow T^c := M \setminus T \in \mathscr{A}$

(iii) $T_1, T_2, \ldots \in \mathscr{A} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \in \mathscr{A}$.

Eine mit einer $\sigma$-Algebra $\mathscr{A}$ ausgestatte Menge $M$

bildet einen *messbaren Raum* $(M, \mathscr{A})$.

Eine Abbildung $m : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ mit der Eigenschaft

$$(*) \quad m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(T_n)$$

für paarweise disjunkte $T_1, T_2, \ldots \in \mathscr{A}$

heißt dann ein *Maß* auf $(M, \mathscr{A})$.

Die Eigenschaft $(*)$ bezeichnet man als $\sigma$-Additivität von $m$.

Ist $m(M) = 1$, so nennt man $m$ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* (oder kurz ein *W-Maß*).

## Definition (Kolmogorov 1933)

Ein *W-Raum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbf{P})$ bestehend aus einem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{E})$ und einem W-Maß $\mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathscr{E})$.

Den Wertebereich $S$ einer Zufallsvariablen denkt man sich dann immer mit einer $\sigma$-Algebra $\mathscr{S}$ ausgestattet.

Man fordert die *Messbarkeit* von $X$ in dem Sinn, dass

$\{X \in A\} \in \mathscr{E}$ für alle $A \in \mathscr{S}$,

und bekommt dann

die Verteilung $\rho$ von $X$ als W-Maß auf $(S, \mathscr{S})$

über den Transport des W-Maßes $\mathbf{P}$ mittels $X$:

$$\rho(A) := \mathbf{P}(\{X \in A\}), \quad A \in \mathscr{S}.$$

Das sichere Ereignis entspricht der Menge $\Omega$,
das unmögliche Ereignis entspricht der leeren Menge.

Ein “Oder-Ereignis” entspricht
einer Vereinigung von Teilmengen,
ein “Und-Ereignis” entspricht
einem Durchschnitt von Teilmengen.

Das “Nach-sich-Ziehen” von Ereignissen
entspricht der Teilmengenbeziehung.
Das Komplementärereignis entspricht der
Komplementärmenge.

Indikatorvariable werden zu

Indikatorfunktionen von Teilmengen von $\Omega$.

Zwei Zufallsvariable $X$ und $Y$ sind gleich, wenn sie als auf $\Omega$ definierte Abbildungen übereinstimmen. Dabei gibt es Freiheiten, die Wertebereiche $S_X$ und $S_Y$ zu wählen. Es muss jedenfalls gelten, dass $X(\Omega) \subset S_X$ und $Y(\Omega) \subset S_Y$.

Zwei Zufallsvariable sind $\mathbf{P}$-*fast sicher gleich*, wenn gilt:

$$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1.$$