Vorlesung 4a

Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten.

Teil 5

Positivität und Monotonie des Erwartungswertes

(Buch S. 55)

Wir beweisen jetzt

(zumindest für diskrete rellwertige Zufallsvariable)

zwei weitere (allgemein gültige) fundamentale

Eigenschaften des Erwartungswerts.

Als Vorbereitung dazu ist hier ein kleiner

Appendix zu Teil 1 der heutigen Vorlesung.

Die Aussage “$X \geq 0$” und das Ereignis $\{X \geq 0\}$:

X sei eine reellwertige Zufallsvariable.

Die Aussage “$X \geq 0$”

wollen wir als gleichbedeutend damit verstehen,

dass $\{X \geq 0\}$ das sichere Ereignis ist.

In dieser Situation können wir wahlweise $\mathbb{R}$ oder $[0, \infty)$

als Wertebereich von X verwenden.

Die Aussage $X \leq Y$ und das Ereignis $\{X \leq Y\}$:

Es sei $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$,

der Halbraum über (und einschließlich) der Diagonalen.

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y setzen wir

$$\{X \leq Y\} := \{(X, Y) \in H\}.$$

Die Aussage "$X \leq Y$"

wollen wir als gleichbedeutend damit verstehen,

dass $\{X \leq Y\}$ das sichere Ereignis ist.

Positivität des Erwartungswertes

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Monotonie des Erwartungswertes

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefinierten Erwartungswerten gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

Nach Voraussetzung (siehe die "Vorbereitung" am Beginn dieses Teils) können wir $[0, \infty)$ als Wertebereich ansehen.

Weil X als diskret vorausgesetzt war, existiert dann eine abzählbare Teilmenge $S \subset [0, \infty)$ mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$.

Es wird sich als günstig (und sogar notwendig) erweisen anzunehmen, dass 0 zu S gehört.

Nach unserer Definition des Erwartungswerts aus V3b1 gilt:

$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\mathbf{P}(X = a) = \quad 0 + \sum_{a \in S : a > 0} a\mathbf{P}(X = a)$,

woraus sich sofort Aussage (i) ergibt.

Ist $\mathbf{E}[X] = 0$, dann muss in der blauen Identität

$\mathbf{P}(X = a) = 0$ für alle strikt positiven $a \in S$ gelten.

Wegen $1 = \sum\limits_{a \in S} \mathbf{P}(X = a)$

$= \mathbf{P}(X = 0) + \sum\limits_{a \in S : a > 0} \mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = 0) + 0$

folgt $\mathbf{P}(X = 0) = 1$. Umgekehrt impliziert dies

$\mathbf{P}(X = a) = 0$ für alle $a \in S$ mit $a > 0$, also (wieder wegen

der blauen Identität) $\mathbf{E}[X] = 0$. $\square$

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Beweis:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$.

Aus der Positivität und der Linearität des Erwartungswertes

folgt $\mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1] \geq 0$. $\square$

Die Ungleichung von Markov

X reellwertige Zufallsvariable mit $X \geq 0$, $c > 0$.

Dann gilt $\quad c\mathbf{1}_{[c,\infty)}(a) \leq a, \quad a \geq 0, \quad$ und daher

$$cI_{\{X \geq c\}} \leq X.$$

Aus Linearität und Monotonie des Erwartungswertes folgt:

$$c\mathbf{E}[I_{\{X \geq c\}}] \leq \mathbf{E}[X]$$

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[X]}$$

Dies ist die **Ungleichung von Markov.**