Vorlesung 4a

Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten.

Teil 3

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.

(Buch S. 57)

Für Indikatorvariablen und Ereignisse

gilt die Beziehung

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1),$$

$$\mathbf{E}[I_E] = \mathbf{P}(I_E = 1) = \mathbf{P}(E).$$

Aus dem Rechnen mit Indikatorvariablen

und aus der Linearität des Erwartungswertes

ergeben sich die Regeln

für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten:

(i) $\mathbf{P}(E_{\mathsf{s}}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_{\mathsf{u}}) = 0.$

denn

eine $\{0, 1\}$-wertige ZV'e, die stets den Wert 1 annimmt,

hat Erwartungswert 1.

Das passt auch zu unserer Vereinbarung der ersten Stunde:

Für eine S-wertige Zufallsvariable X ist $\mathbf{P}(X \in S) = 1$.

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$

Das sieht man aus der Identität

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes.

Aus (ii) folgt sofort die Subadditivität:

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$$

Eine weitere unmittelbare Konsequenz aus (ii) ist

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

(endliche) Additivität

In der Wahrscheinlichkeitstheorie arbeitet man mit einer stärkeren Form dieser Eigenschaft, der σ-Additivität. Sie besagt:
Für unendliche Folgen $E_1, E_2, \ldots$ von paarweise disjunkten Ereignissen gilt $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \cdots$.
Diese Formel entspricht zusammen mit der Eigenschaft (i) den Axiomen von Kolmogorov für Wahrscheinlichkeitsmaße, vgl. Teil 6 der heutigen VL.

Wir fassen zusammen (und ergänzen):

(i) $\mathbf{P}(E_\mathsf{s}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_\mathsf{u}) = 0.$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$,
insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$.

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$
falls E_1 und E_2 disjunkt.

(iv) $\mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E)$.

(v) $\mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2)$, falls $E_1 \subset E_2$.