

Vorlesung 4a

Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und
Wahrscheinlichkeiten.

Teil 1

Ereignisse und ihre Indikatorvariablen
(Buch S. 36-37)

Wir wissen schon:

**Ein- und dasselbe Ereigniss kann man
auf verschiedene Weisen darstellen:**

Beispiel:

Sei $X = (X_1, X_2)$ das Paar der Augenzahlen
beim zweimaligen (gewöhnlichen) Würfeln. Dann gilt:

$$\{X_1 = 3\}$$

$$= \{(X_1, X_2) \in \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}\}$$

Allgemeiner: Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar mit Wertebereich $S_1 \times S_2$.

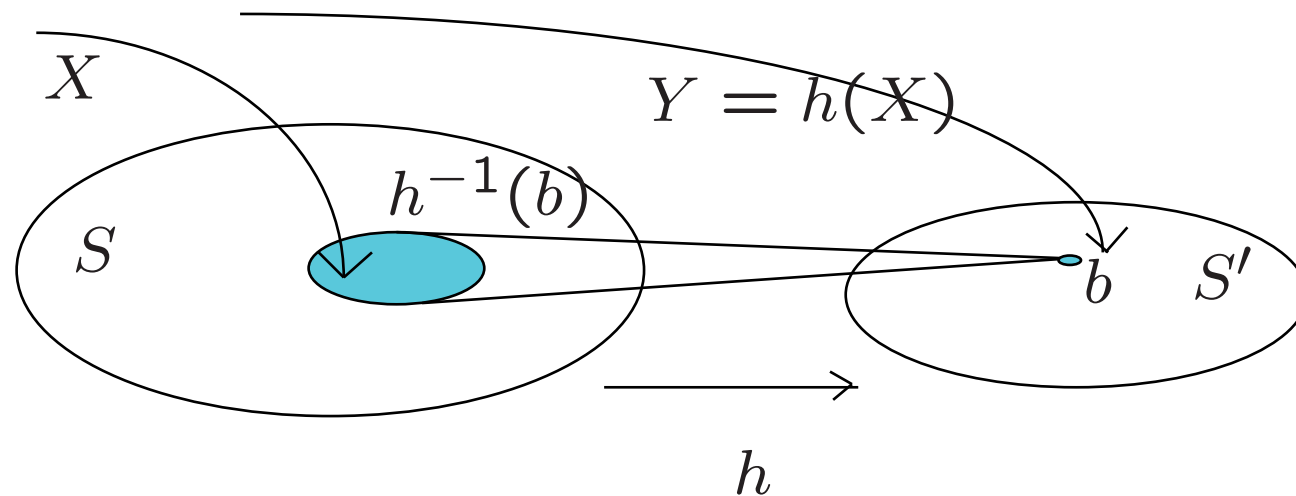
Dann ist für $a_1 \in S_1$

$$\{X_1 = a_1\} = \{X \in \{a_1\} \times S_2\} = \{X_1 \in a_1, X_2 \in S_2\}.$$

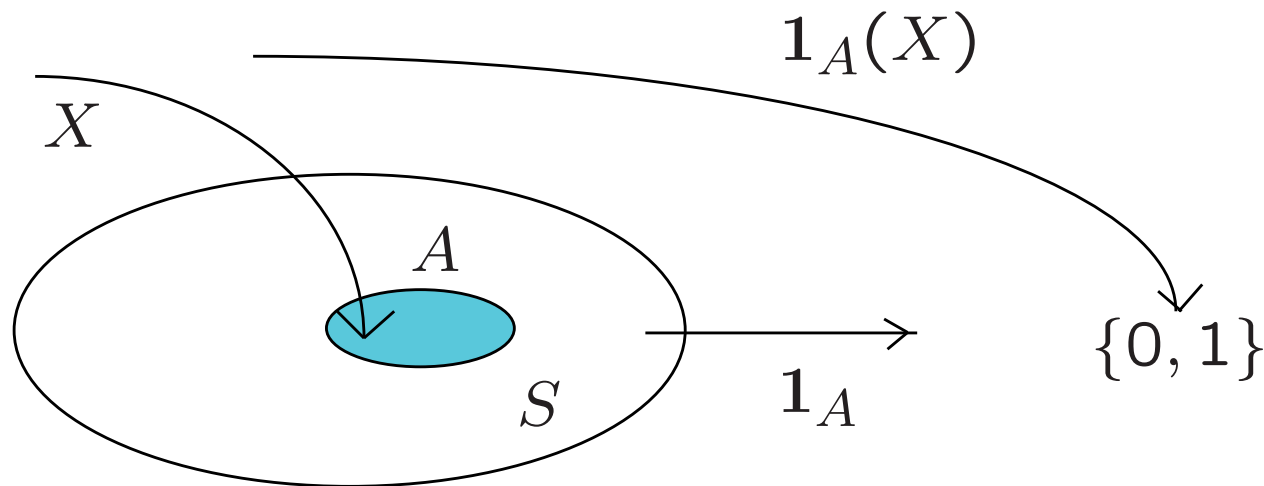
Noch allgemeiner gilt

für die “Verarbeitung” $Y = h(X)$ einer Zufallsvariablen X :

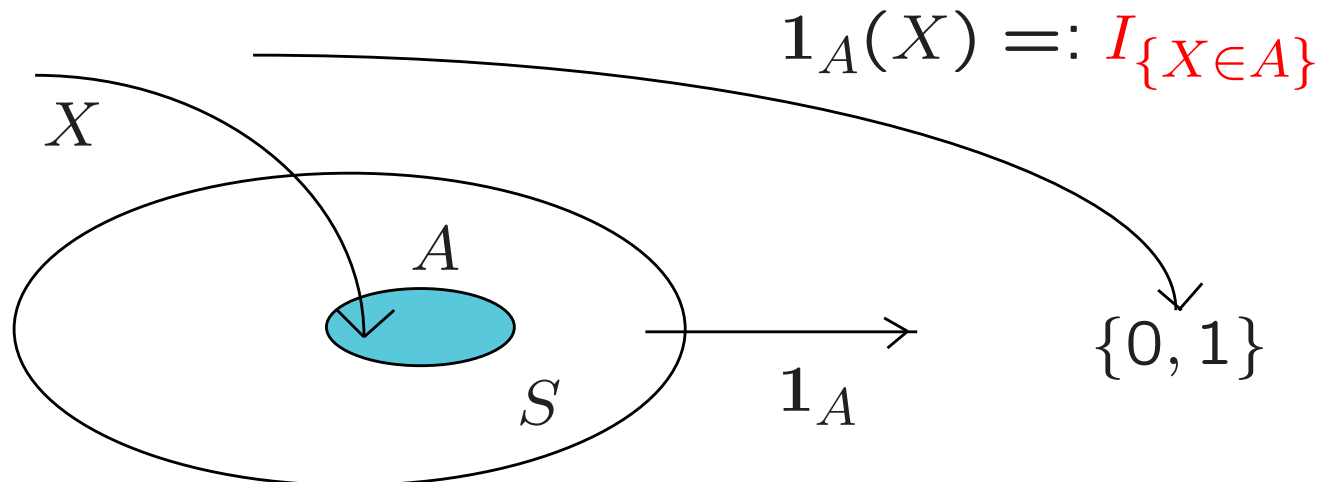
$$\{Y = b\} = \{X \in h^{-1}(b)\}.$$



Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist die Verarbeitung von X mittels der Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A$ einer Teilmenge A von S :

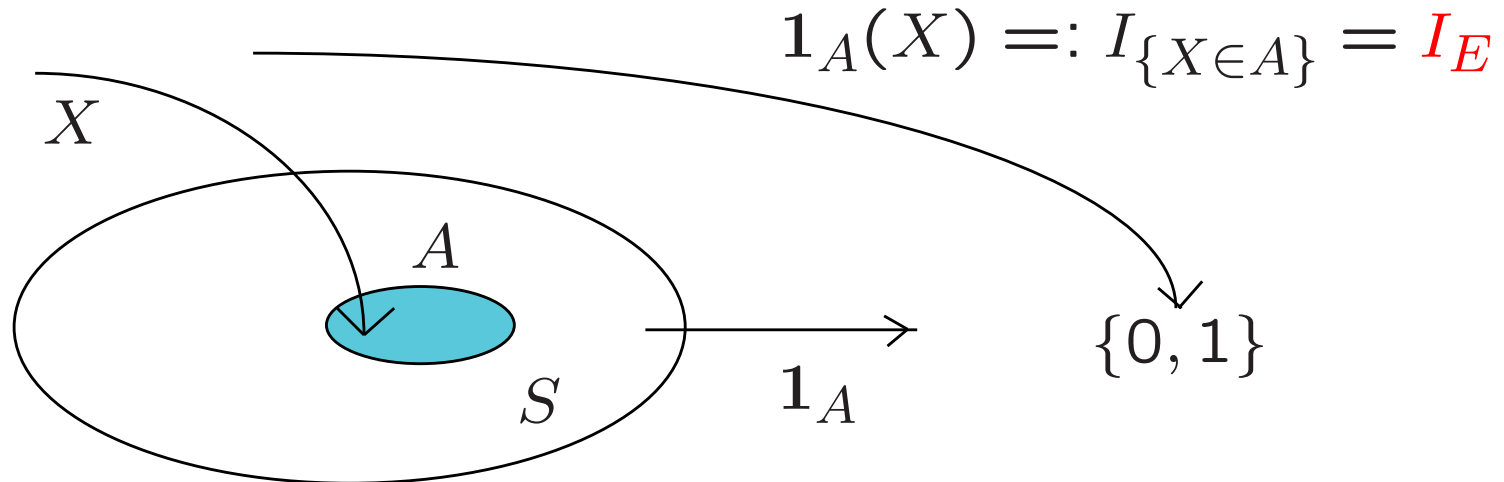


$$\{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$



$$\{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$

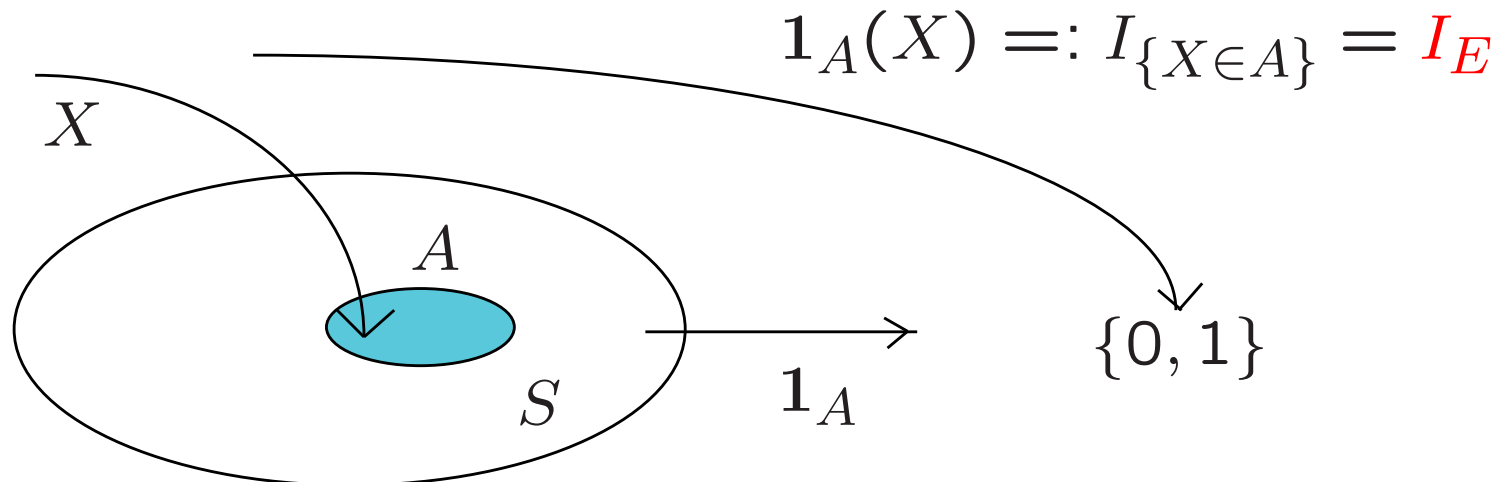
$I_{\{X \in A\}}$ heißt **Indikatorvariable** des Ereignisses $\{X \in A\}$



$$E := \{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$

$$E = \{I_E = 1\}$$

I_E fällt auf den Wert 1 genau dann,
wenn das Ereignis E eintritt.



$$E := \{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$

$$E = \{\mathbf{I}_E = 1\}$$

\mathbf{I}_E fällt auf den Wert 0 genau dann,
wenn das Ereignis E nicht eintritt.

$$E = \{I_E = 1\}.$$

Ereignisse sind gleich,
wenn ihre Indikatorvariablen gleich sind

Wann aber “sind zwei Zufallsvariablen gleich”?
Intuitiv dann, wenn sie *sicher* gleich ausfallen.

Das präzisieren wir im Folgenden.

Das sichere Ereignis

Für jede Zufallsvariable X mit Wertebereich S gilt:

$$I_{\{X \in S\}} = \mathbf{1}_S(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 1 fällt.

Das *sichere Ereignis* E_S ist dadurch charakterisiert, dass seine Indikatorvariable sicher den Wert 1 annimmt:

$$I_{E_S} = 1.$$

Die Aussage $X = Y$ und das Ereignis $\{X = Y\}$

Seien X, Y Zufallsvariable mit demselben Wertebereich S .

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale“ in S^2 .

Wir definieren das Ereignis “ X und Y fallen gleich aus” als

$$\{X = Y\} := \{(X, Y) \in D\}$$

Ist dieses gleich dem sicheren Ereignis,

so schreiben wir dafür kurz:

$$X = Y$$