

Vorlesung 3b

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 5

Linearität des Erwartungswertes

(vgl. (Buch S. 52))

Satz 1. (Homogenität des EW)

Der Erwartungswert des c -fachen
einer diskreten reelweertigen Zufallsvariablen X
ist das c -fache des Erwartungswertes:

$$h(a) := ca, \quad Y := h(X) = cX$$

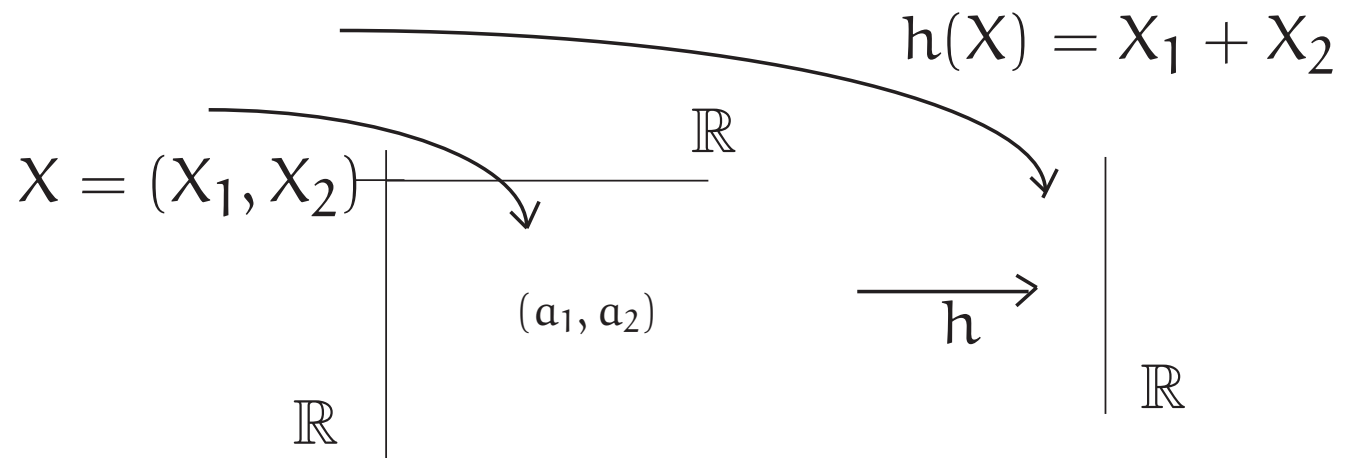
$$\begin{aligned} \mathbf{E}[cX] &= \mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \mathbf{P}(X = a) \\ &= \sum_{a \in S} ca \mathbf{P}(X = a) = c \sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a) = c\mathbf{E}[X]. \end{aligned}$$

Satz 2. (Additivität des Erwartungswertes)

Sei (X_1, X_2) ein zufälliges Paar reellwertiger ZV'er,
für die $\mathbf{E}[X_1]$ und $\mathbf{E}[X_2]$ existieren.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$$



$$h(a_1, a_2) = a_1 + a_2$$

Beweis.

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit

$$\mathbf{P}(X_1 \in S_1) = \mathbf{P}(X_2 \in S_2) = 1.$$

Aus der Transformationsformel folgt mit

$$h(a_1, a_2) := a_1 + a_2:$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \sum_{(a_1, a_2) \in S_1 \times S_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[X_1]$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[X_1]$$

$$+ \mathbf{E}[X_2]$$



Korollar aus Satz 1 und Satz 2 [**Linearität des Erwartungswertes**]

(Buch S. 52)

Für reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2
mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[c_1 X_1 + c_2 X_2] = c_1 \mathbf{E}[X_1] + c_2 \mathbf{E}[X_2] , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$