Vorlesung 3b

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 4

Die Transformationsformel für Erwartungswerte

(vgl. Buch S. 23)

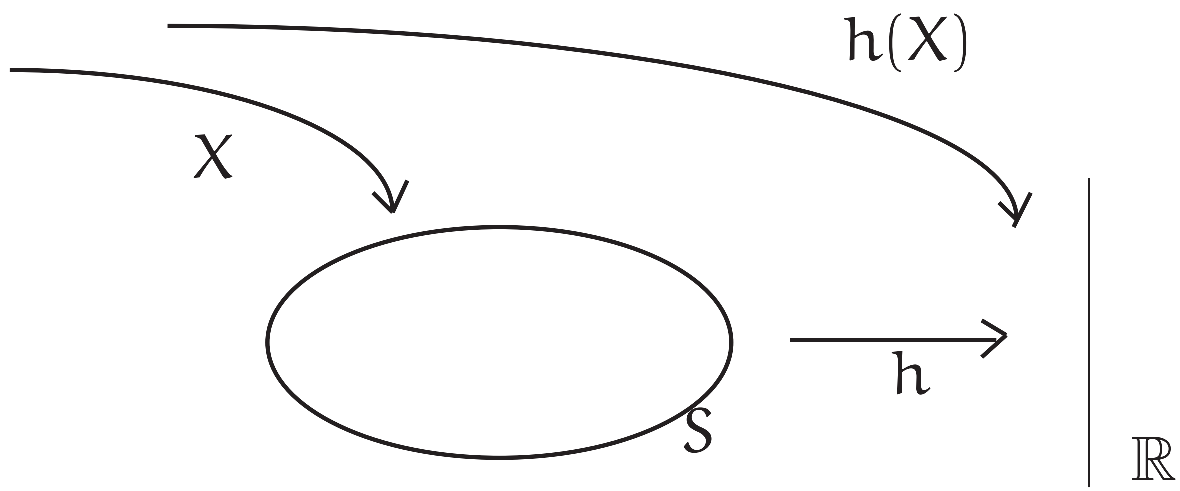
Diese Formel ist oft hilfreich
bei der Berechnung von Erwartungswerten.

Sie erinnert an die Einsetzungsregel(Substitutionsregel)
zum Berechnen von Summen und Integralen,

und wird uns im nächsetn Teil helfen,
die Linearität des EW aus seiner Definition herzuleiten.

Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

und h eine Abbildung von S nach $\mathbb{R}$



Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

und h eine Abbildung von S nach $\mathbb{R}$

so, dass der Erwartungswert der Zufallsvariablen $h(X)$

wohldefiniert ist. Dann ist

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\,\mathbf{P}(X = a)\ .$$

Die Idee ist einfach: anstatt die Werte $b = h(a)$, $a \in S$,

mit deren Gewichten zu mitteln,

“zerlegt man nach dem Urbild”

und mittelt mit den Gewichten der Werte a.

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\, \mathbf{P}(X = a)$$

Denn:

$$\sum_{b \in h(S)} b\, \mathbf{P}(h(X) = b)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} b \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} \sum_{a \in h^{-1}(b)} h(a)\, \mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{a \in S} h(a)\, \mathbf{P}(X = a)\,. \quad \square$$