Vorlesung 3b

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 3

Zur Wohldefiniertheit des Erwartungswertes

(vgl. Buch S. 23)

Wie kann es sein, dass für eine

diskrete reellwertige Zufallsvariable X

mit $\mathbf{P}(X \in S)$, S abzählbar,

die Summe $\sum_{a \in S} a\mathbf{P}(X = a)$ nicht wohldefiniert ist?

Ein Beispiel: $\mathbf{P}(X = (-2)^n) := 2^{-n},\ n = 1, 2, \ldots$

$$\text{Dann ist} \sum_{n \in \{1,3,\ldots\}} -2^n \mathbf{P}(X = -2^n) = -\infty$$

$$\text{und} \sum_{n \in \{2,4,\ldots\}} 2^n \mathbf{P}(X = 2^n) = +\infty.$$

Aber die Summe von $-\infty$ und $+\infty$ gibt keinen Sinn!

Wenn wir sagen

Die diskrete reellwertige Zufallsvariable X

hat einen wohldefinierten Erwartungswert

oder kurz

$\mathbf{E}[X]$ existiert

meinen wir, dass nicht zugleich

$$\sum_{a \in S, a > 0} a\mathbf{P}(X = a) \quad \text{und} \quad \sum_{a \in S, a < 0} |a|\, \mathbf{P}(X = a)$$

Unendlich sein dürfen.