Vorlesung 3b

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 1

Der Erwartungswert als gewichtetes Mittel

(Buch S. 23)

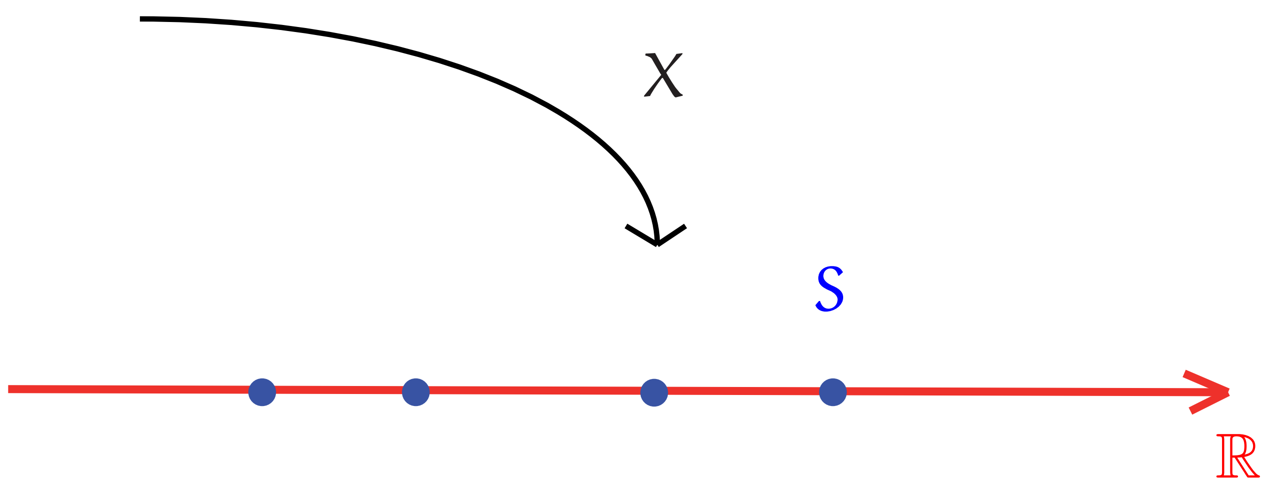
X sei eine diskrete reellwertige Zufallsvariable, d.h.

eine ZV'e mit Wertebereich $\mathbb{R}$ (oder einer Teilmenge davon),

sodass eine

endliche oder abzählbar unendliche Menge S existiert mit

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$



Eine einprägsame Kenngröße

für die *Lage* der Verteilung von X

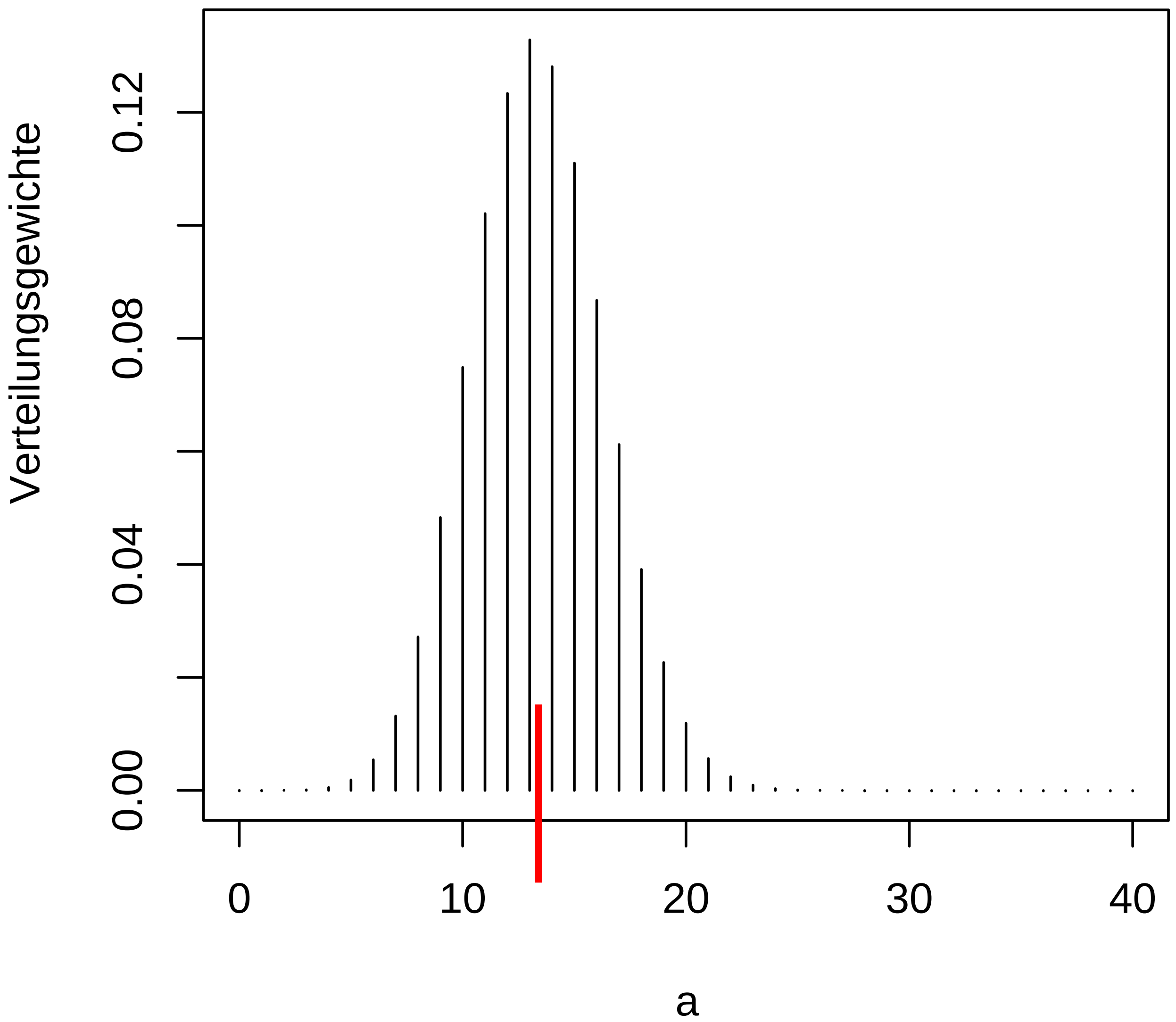
ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel

der möglichen Werte von X:

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \, \mathbf{P}(X = a) \; .$$

Man spricht vom *Erwartungswert* von X.

(Wir bezeichnen ihn auch mit μ oder μ_X.)



Verteilungsgewichte
0.00
0.04
0.08
0.12
0
10
20
30
40
a

Das elementarste Beispiel:

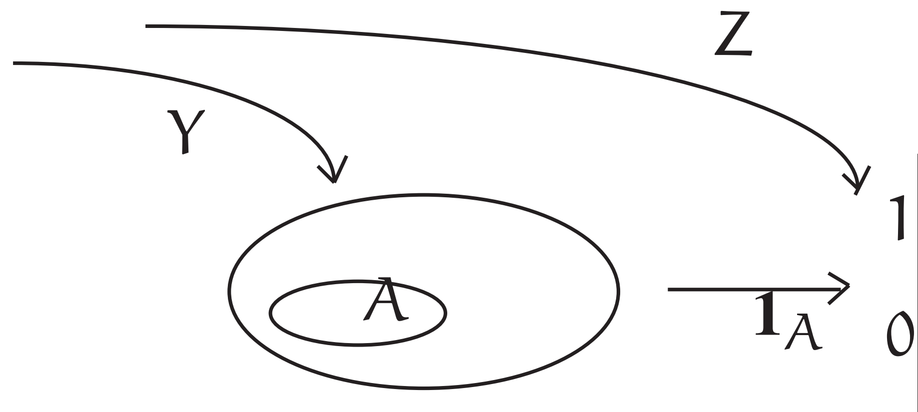
$$Z = \begin{cases} 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p \end{cases}$$

Man denke an einen einfachen p-Münzwurf.

$$\mathbf{E}[Z] = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$$

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1).$$

Zufällige Zähler und Indikatorvariable von Ereignissen



$$Z = \mathbf{1}_A(Y) =: I_{\{Y \in A\}}$$

.... die *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{Y \in A\}$

$$\{Z = 1\} = \{Y \in A\}$$

$$\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(Y \in A)$$

$$\mathbf{E}[I_{\{Y \in A\}}] = \mathbf{P}(Y \in A).$$

Für allgemeines diskretes, reellwertiges X hatten wir

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\, \mathbf{P}\{X = a\}$$

$$= \sum_{a \in S} a\, \rho(a)$$

Dabei sind die Zahlen $\rho(a)$ die Verteilungsgewichte von X.

Merke:

Der Erwartungswert der Zufallvariablen X

hängt nur von ihrer Verteilung ρ ab.

Synonym sprechen wir daher auch manchmal vom

Erwartungswert der Verteilung ρ .

X

eine Zufallsgröße;

$\mathbf{E}[X]$

eine Zahl.