

Vorlesung 3a

Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

Teil 3:

Zufällige Besetzungen:

Vom Würfeln zur Multinomialverteilung

Das $(p_1, \dots, p_g)$ -Würfeln
als Verallgemeinerung des p -Münzwurfs

Oder: Was 2 recht ist, soll g billig sein!

(vgl. Buch S. 28)

Definition (“ n -faches $(p_1, \dots, p_g)$ -Würfeln”):

Seien $g \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_g \geq 0$ mit $p_1 + \dots + p_g = 1$.

Wir definieren **Verteilungsgewichte** auf

$$S := \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{1, \dots, g\}\}$$

durch

$$\rho(a_1, \dots, a_n) := p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdots p_{a_n}.$$

Eine Zufallsvariable X mit diesem Zielbereich S
und diesen Verteilungsgewichten ρ nennen wir

n -faches $(p_1, \dots, p_g)$ -Würfeln.

Für jedes $a \in S$ mit
 b_1 Komponenten gleich 1,
 b_2 Komponenten gleich 2,
...
 b_g Komponenten gleich g

ist dann

$$\mathbf{P}(X = a) = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_g^{b_g}$$

9. Vom $(p_1, \dots, p_g)$ -Würfeln zur Multinomialverteilung

$X = (X_1, \dots, X_n)$ sei ein n -faches $(p_1, \dots, p_g)$ -Würfeln

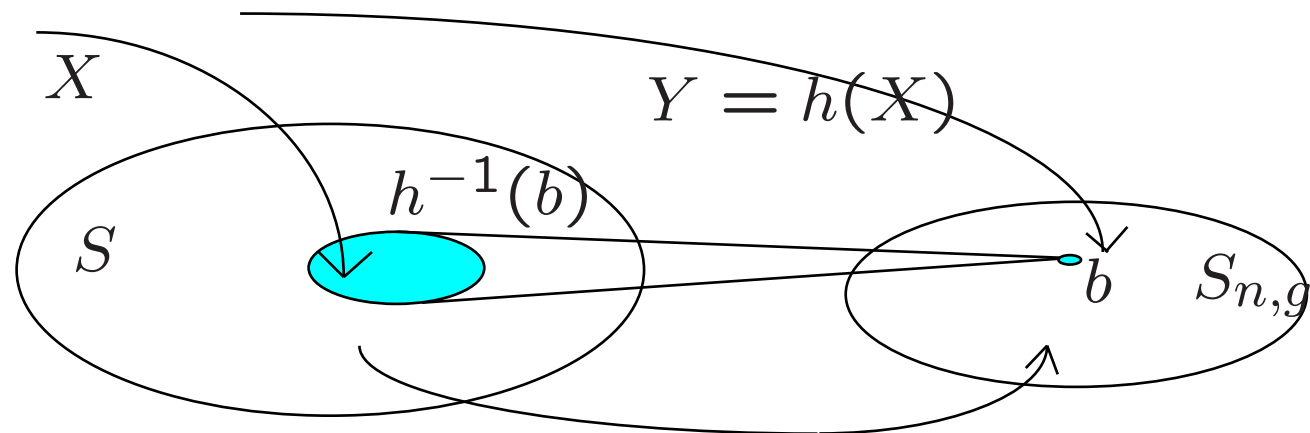
$$Y_j := \#\{i : X_i = j\}$$

(die Anzahl der Würfe mit Ergebnis j).

$Y := (Y_1, \dots, Y_g)$ hat dann den Zielbereich

$$S_{n,g} = \{(b_1, \dots, b_g) : b_j \in \mathbb{N}_0, b_1 + \dots + b_g = n\}.$$

Verteilung von Y = ?



$$h(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_g) =: b$$

mit $b_j := \#\{i : a_i = j\}$, $j = 1, \dots, g$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (b_1, \dots, b_g)$

hat Gewicht $p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$

Wieviele solche a gibt es?

Dazu überlegen wir:

Auf wieviele Arten kann man
 n Objekte so auf g Fächer verteilen,
dass das j -te Fach genau b_j Objekte enthält?

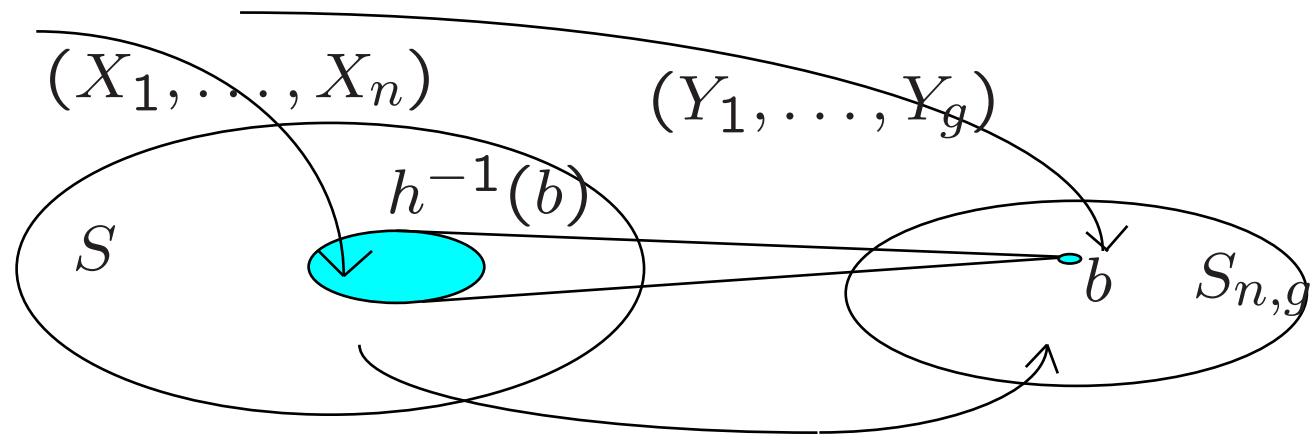
Dabei ist $b_1 + \dots + b_g = n$.

Die Antwort ist:

$$\binom{n}{b_1} \cdot \binom{n - b_1}{b_2} \cdots \binom{n - b_1 - \dots - b_{g-1}}{b_g}$$

$$= \frac{n!}{b_1! b_2! \cdots b_g!} =: \binom{n}{b_1, \dots, b_g}$$

Multinomialkoeffizient, lies: n über $b_1, \dots, b_g$



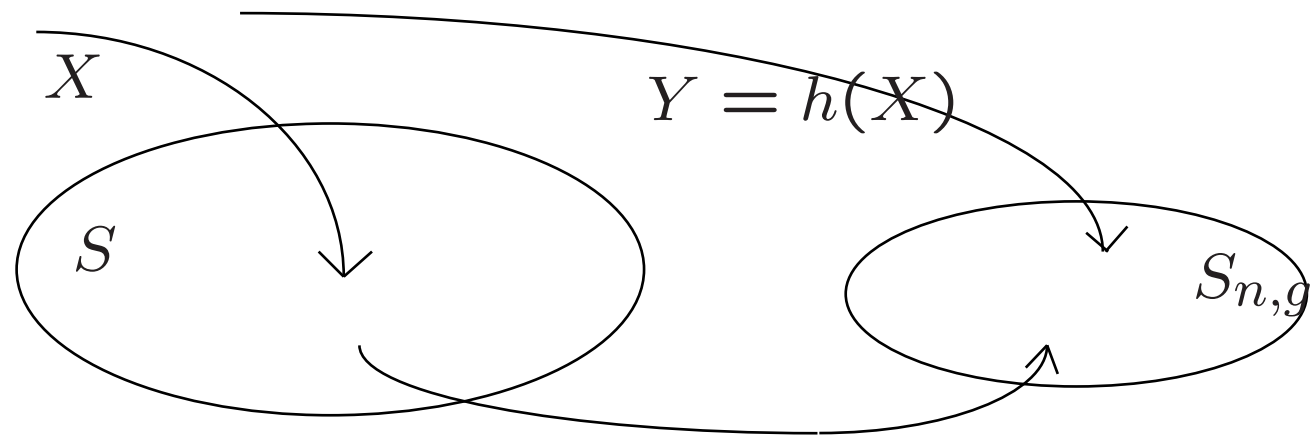
$$h(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_g)$$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (b_1, \dots, b_g)$

hat Gewicht $p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$

Es gibt $\binom{n}{b_1, \dots, b_g}$ solche a .

$$\mathbf{P}(Y_1 = b_1, \dots, Y_g = b_g) = \binom{n}{b_1, \dots, b_g} p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$$



$$h(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_g) =: k$$

mit $b_j := \#\{i : a_i = j\}$, $j = 1, \dots, g$

$$\mathbf{P}(Y_1 = b_1, \dots, Y_g = b_g) = \binom{n}{b_1, \dots, b_g} p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$$

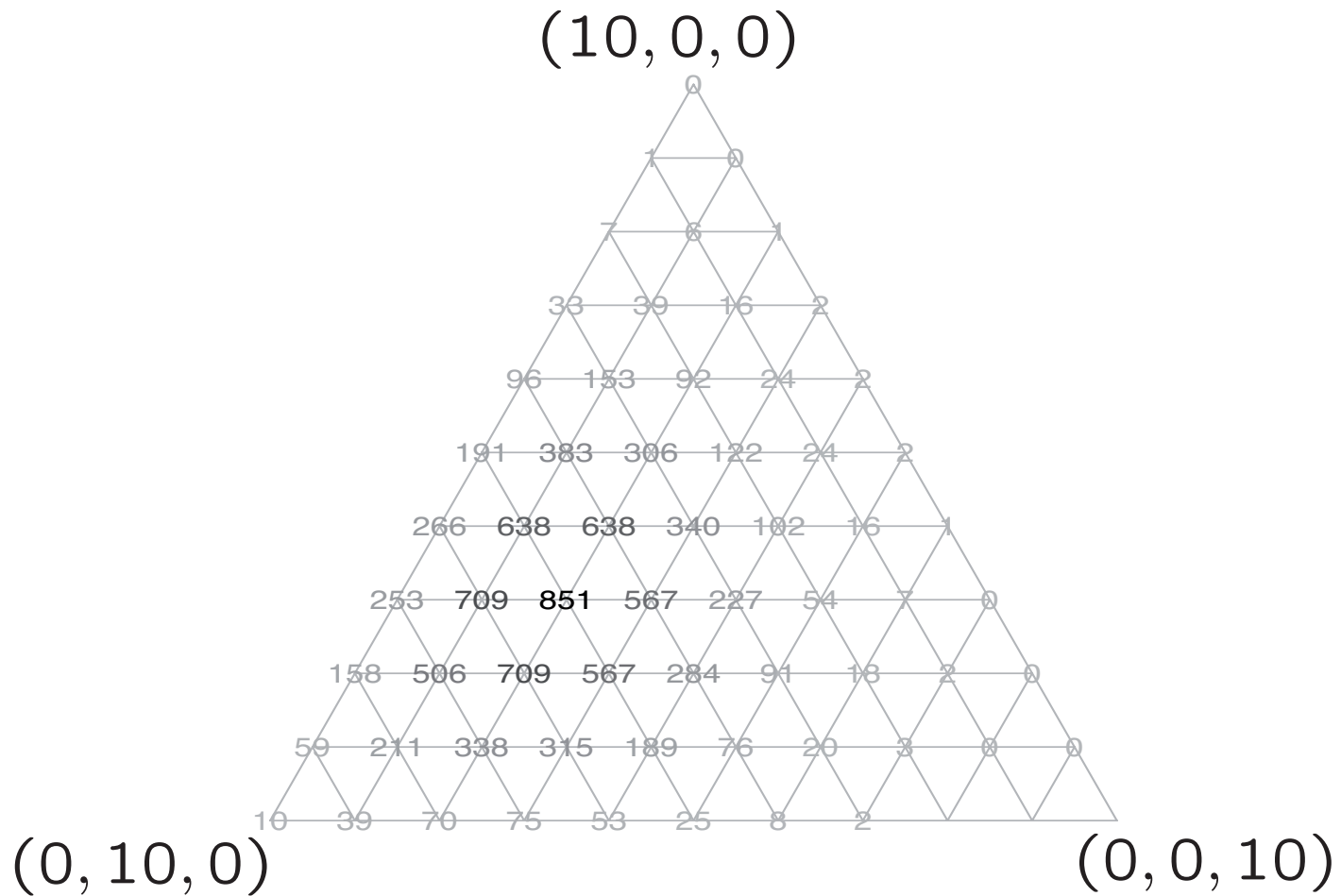
Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S_{n,g}$
heißt *multinomialverteilt* mit Parametern $n; p_1, \dots, p_g$,

wenn

$$\mathbf{P}(X = (b_1, \dots, b_g)) = \binom{n}{b_1, \dots, b_g} p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g},$$

$$(b_1, \dots, b_g) \in S_{n,g} .$$



Gewichte der Multinomialverteilung, notiert in Vielfachen von $\frac{1}{10000}$,
für $n = 10$, $g = 3$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.2$

Resumé

$$g \in \mathbb{N}$$

Würfeln

Besetzung der Ausgänge

Multinomialverteilung

$$g = 2$$

Münzwurf

Anzahl der Erfolge

Binomialverteilung