

Vorlesung 1b

Wiederholte rein zufällige Wahl (aus endlich vielen möglichen Ausgängen) mit dem Beispiel “Wahrscheinlichkeit von Kollisionen”

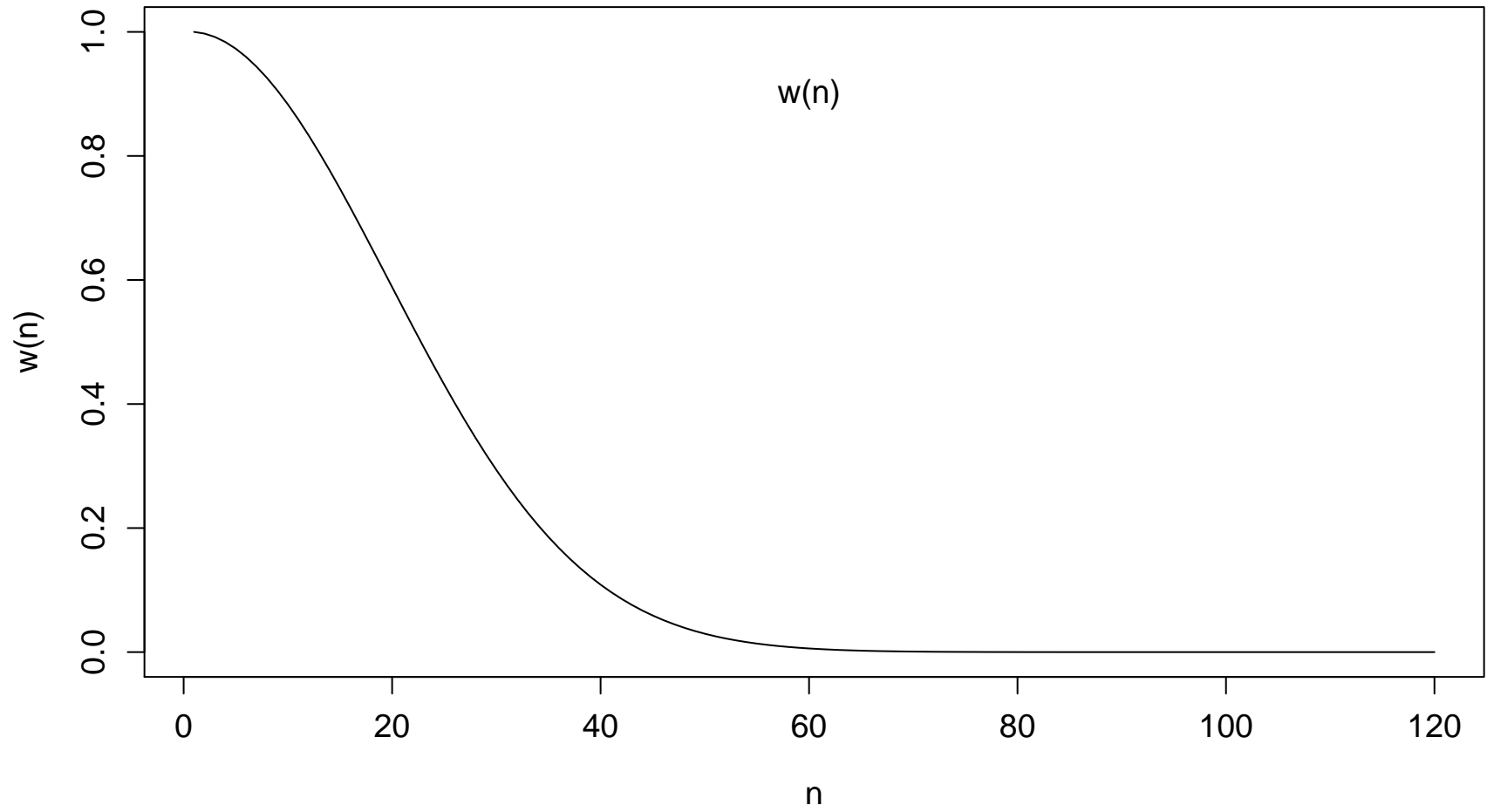
(Buch S. 1-5)

Teil 2

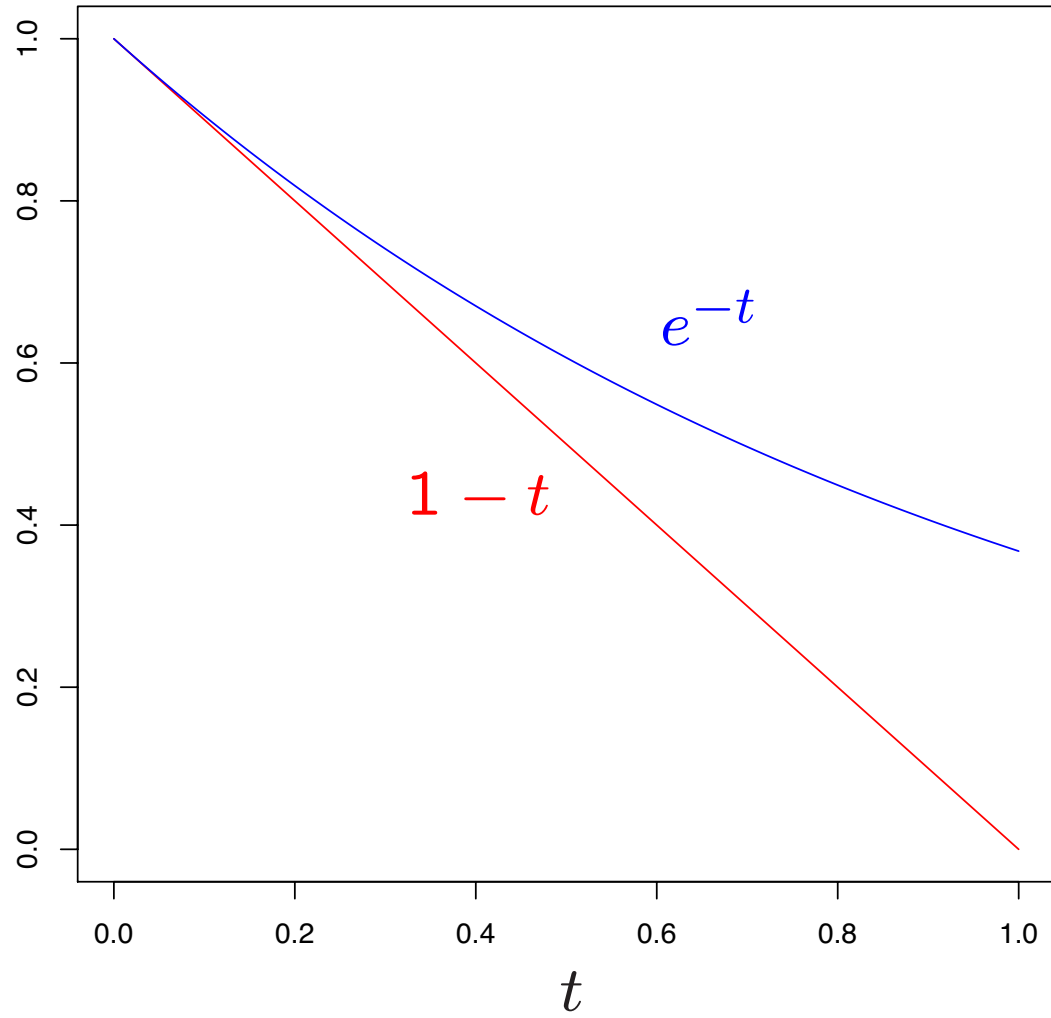
Approximationen der Kollisionswahrscheinlichkeit

$$w(n, g) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{g}\right)$$

Wahrscheinlichkeit fuer Kollisionsfreiheit bei $g=365$

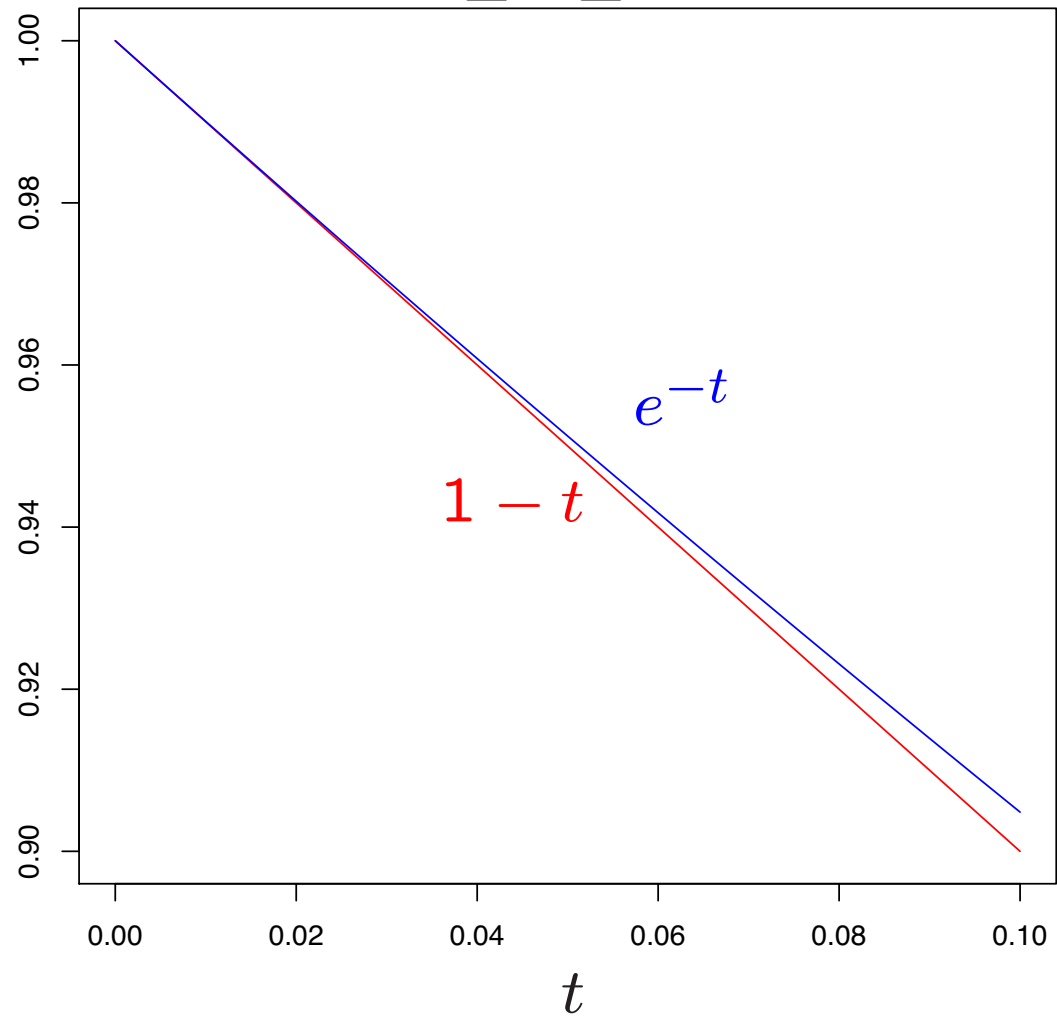


für $0 \leq t \leq 1$:



1. Approximation über die Linearisierung von \exp

für $0 \leq t \leq 0.1$:



Lokale lineare Approximation von $t \mapsto e^{-t}$ bei $t = 0$:

$$e^{-t} = 1 - t + o(t) \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Dabei ist der Term $o(t)$ von *kleinerer Ordnung als t* , d.h. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

Salopp geschrieben:

$$e^{-t} \approx 1 - t \quad \text{für kleine } t.$$

Damit bekommen wir für kleines $\frac{n}{g}$ die Approximation

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{g} \right) &\approx \prod_{i=1}^{n-1} \exp \left(-\frac{i}{g} \right) \\ &= \exp \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{g} \right) = \exp \left(-\frac{(n-1)n}{2g} \right). \end{aligned}$$

Also für kleines $\frac{n}{g}$, d.h. für $n \ll g$:

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2g}\right).$$

Also für kleines $\frac{n}{g}$, d.h. für $n \ll g$:

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2g}\right).$$

Gibt es auch eine Näherungsformel,
die brauchbar ist für alle $n < g$?

Wohlan!

2. Die Stirling-Approximation

(Buch S. 4-5)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \in A) &= \frac{g(g-1) \cdots (g-(n-1))}{g^n} \\ &= \frac{g(g-1) \cdots (g-(n-1)) (g-n)(g-n-1) \cdots 1}{g^n (g-n)(g-n-1) \cdots 1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{g!}{g^n (g-n)!}$$

mit $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$, lies: k -Fakultät

Die Stirling-Formel:

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$\begin{aligned} \frac{g!}{g^n(g-n)!} &\approx \frac{1}{g^n} \sqrt{\frac{g}{g-n}} \frac{g^g}{(g-n)^{g-n}} \frac{e^{g-n}}{e^g} \\ &= \sqrt{\frac{g}{g-n}} e^{-n} \left(\frac{g}{g-n}\right)^{g-n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}} e^{-n} \left(1 - \frac{n}{g}\right)^{n-g} \end{aligned}$$

$$\frac{g!}{g^n (g-n)!} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{g}}} e^{-n} \left(1 - \frac{n}{g}\right)^{n-g}$$

Wir formen jetzt den Ausdruck

$$e^{-n} \left(1 - \frac{n}{g}\right)^{n-g}$$

weiter um. Ein Trick dabei ist es,

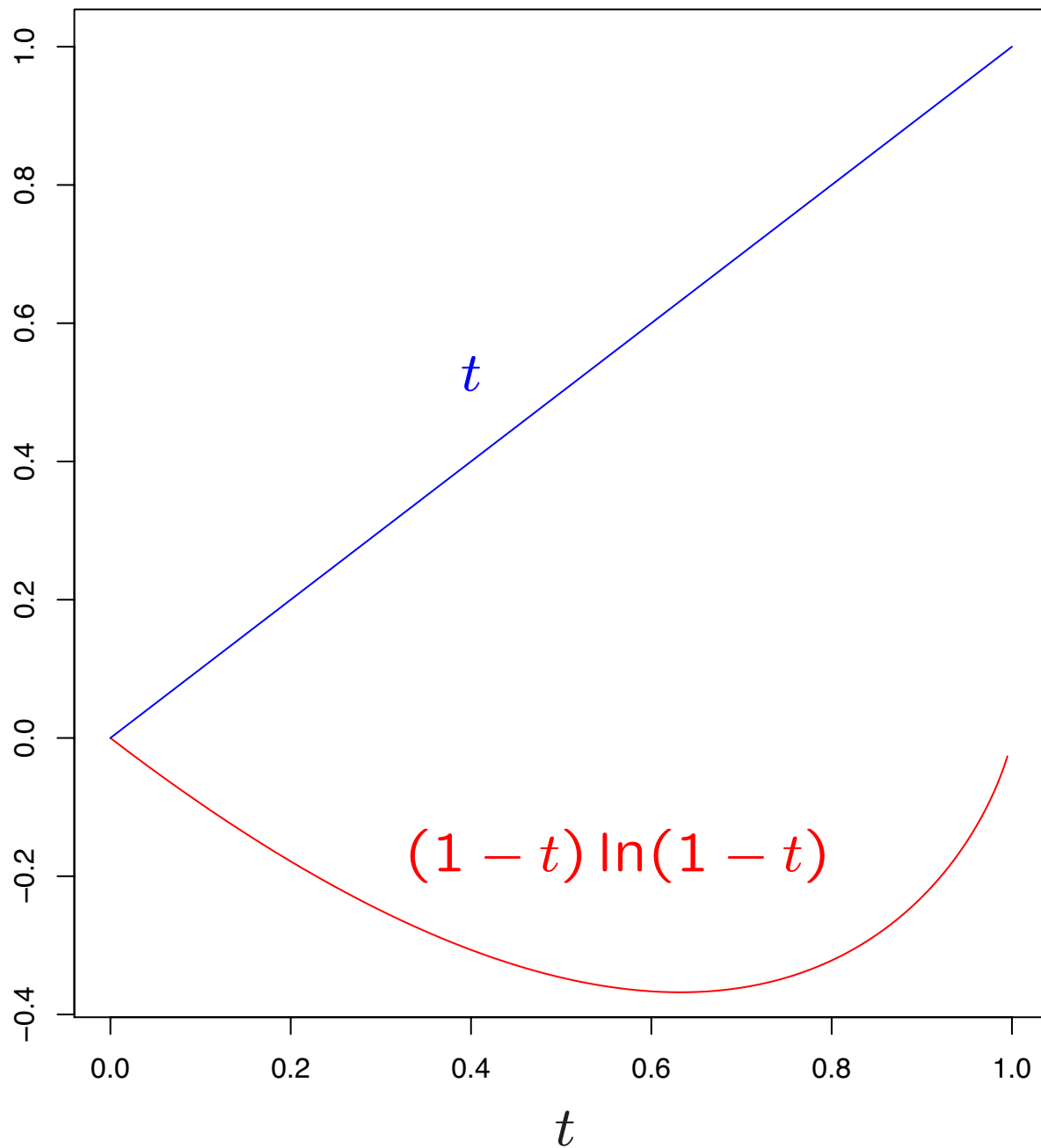
$$1 - \frac{n}{g} \quad \text{als} \quad \exp\left(\ln\left(1 - \frac{n}{g}\right)\right)$$

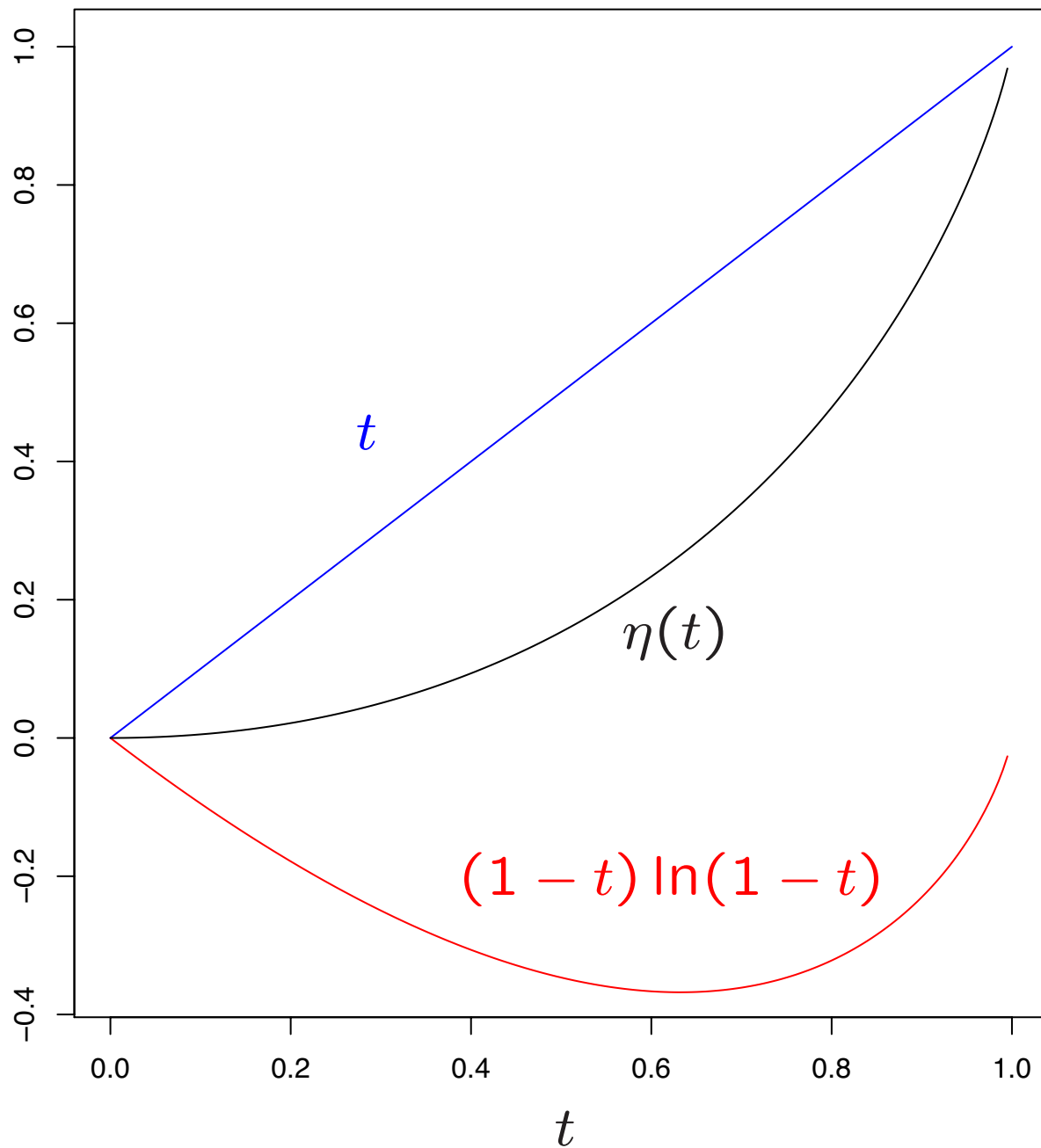
zu schreiben

und dann die Beziehung $e^a e^b = e^{a+b}$ zu verwenden.

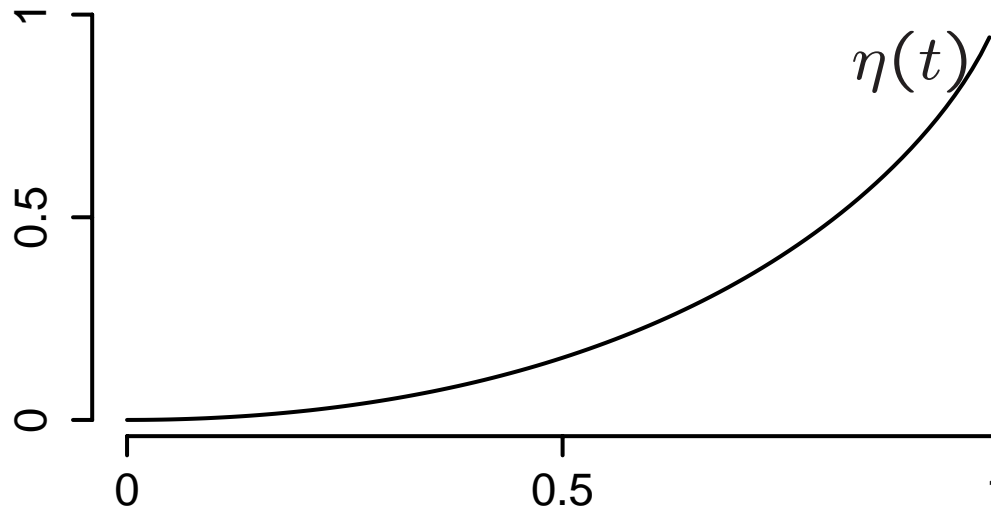
$$\begin{aligned}
e^{-n} \left(1 - \frac{n}{g}\right)^{n-g} &= \exp \left(-n + (n - g) \ln \left(1 - \frac{n}{g}\right) \right) \\
&= \exp \left(-g \left(\frac{n}{g} + \left(1 - \frac{n}{g}\right) \ln \left(1 - \frac{n}{g}\right) \right) \right) \\
&= \exp \left(-g \eta \left(\frac{n}{g} \right) \right)
\end{aligned}$$

mit $\eta(t) := t + (1 - t) \ln(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$.





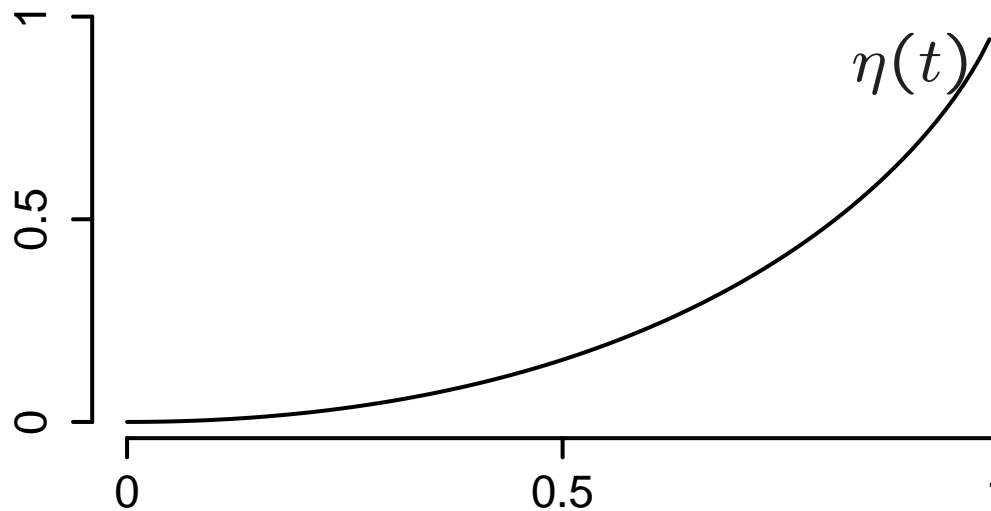
$$\eta(t) := t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{g}}} \exp\left(-g \eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$$

Stirling-Approximation
der Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit

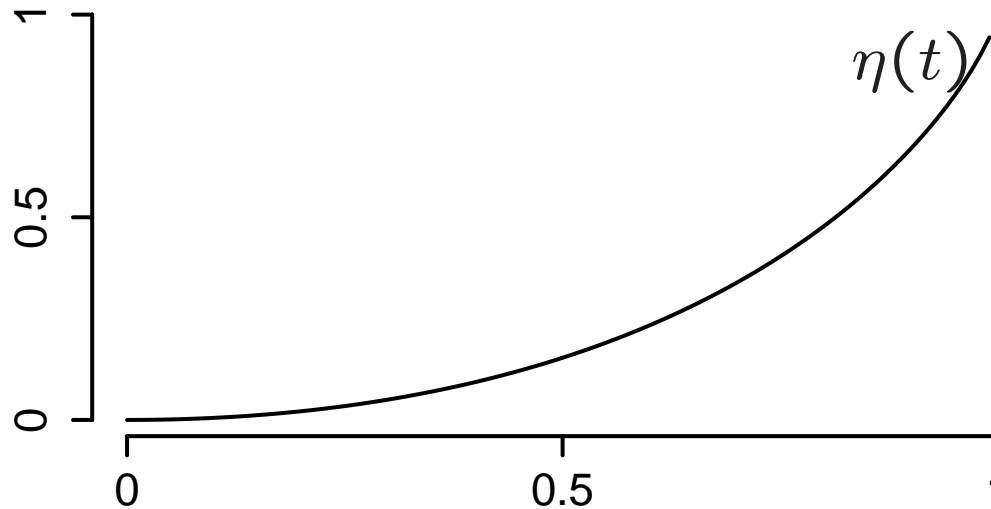
$$\eta(t) := t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{g}}} \exp\left(-g \eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$$

Für $n \ll g$, also $t := \frac{n}{g} \ll 1$,
können wir $\eta(t)$ quadratisch approximieren:

$$\eta(t) := t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

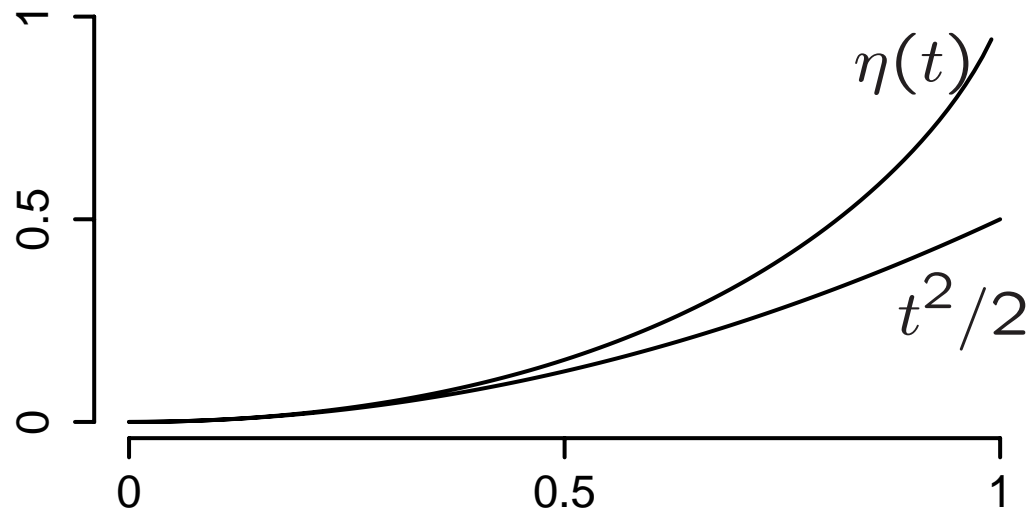


$$\ln(1 - t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \dots$$

$$(1 - t) \ln(1 - t) = -t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ f\u00fcr } t \rightarrow 0$$

$$\eta(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ f\u00fcr } t \rightarrow 0$$

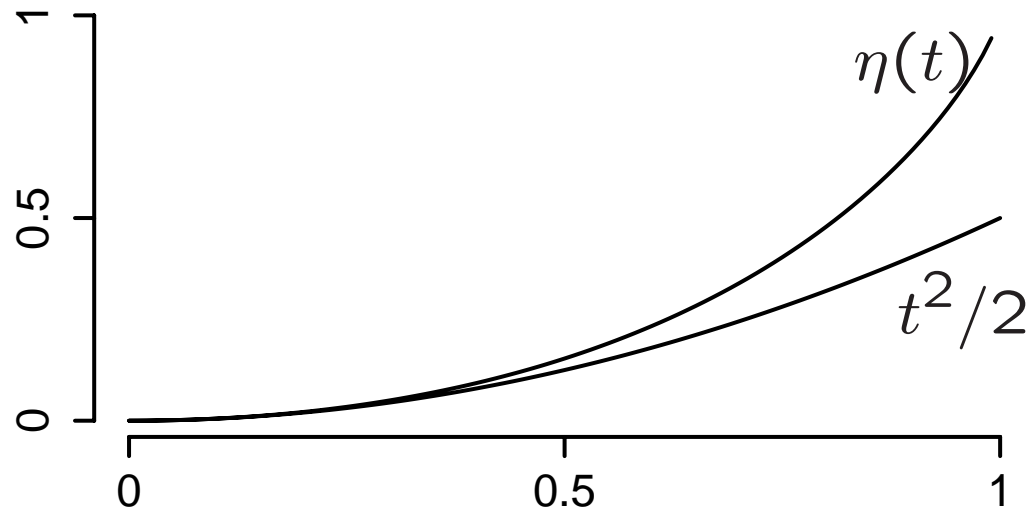
$$\eta(t) := t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



$$\ln(1 - t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \dots$$

$$(1 - t) \ln(1 - t) = -t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ f\"ur } t \rightarrow 0$$

$$\eta(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ f\"ur } t \rightarrow 0$$



$\frac{1}{2}t^2$ ist die quadratische Approximation von $\eta(t)$ um $t = 0$.

Für $n \ll g$ (wie z. B. für $n = 25$, $g = 365$) ist also

$$\eta\left(\frac{n}{g}\right) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{g}\right)^2.$$

Fazit:

Für $n < g$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{g}}} \exp\left(-g \eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$

mit $\eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$

(Stirling-Approximation).

Fazit:

Für $n < g$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{g}}} \exp\left(-g \eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$

mit $\eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$

(Stirling-Approximation).

Für $n \ll g$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(\frac{n}{2g}\right) \exp\left(-\frac{n^2}{2g}\right)$
 $= \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2g}\right)$

(Stirling+Taylor-Approximation)

Fazit:

Für $n < g$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{g}}} \exp\left(-g \eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$

mit $\eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$

(Stirling-Approximation).

Für $n \ll g$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(\frac{n}{2g}\right) \exp\left(-\frac{n^2}{2g}\right)$
 $= \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2g}\right)$

(Stirling+Taylor-Approximation)

Für $n^2 \ll g$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx 1$.

Man beachte:

Die Stirling+Taylor Approximation

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2g}\right)$$

ist identisch mit der

Approximation über die Linearisierung von exp.

Man beachte:

Die Stirling+Taylor Approximation

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2g}\right)$$

ist identisch mit der

Approximation über die Linearisierung von exp.

Im Buch haben wir hier den Faktor $\sqrt{1 - n/g}$ in der Stirling-Approximation vernachlässigt, d.h. gleich 1 gesetzt. Dadurch erhielten wir dort die etwas weniger genaue Näherung

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(-\frac{n^2}{2g}\right).$$

Beispiel: $n = 25, g = 365$:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{g(g-1) \cdots (g-n+1)}{g^n} = 0.431300$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{g}}} \exp \left(-g \eta \left(\frac{n}{g} \right) \right) = 0.431308$$

$$\exp \left(-\frac{n(n-1)}{2g} \right) = 0.4396$$