Vorlesung 1b

# Wiederholte rein zufällige Wahl

(aus endlich vielen möglichen Ausgängen)

mit dem Beispiel

“Wahrscheinlichkeit von Kollisionen”

(Buch S. 1-5)

Teil 1

Zufallsvariable, Ereignisse,

Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen

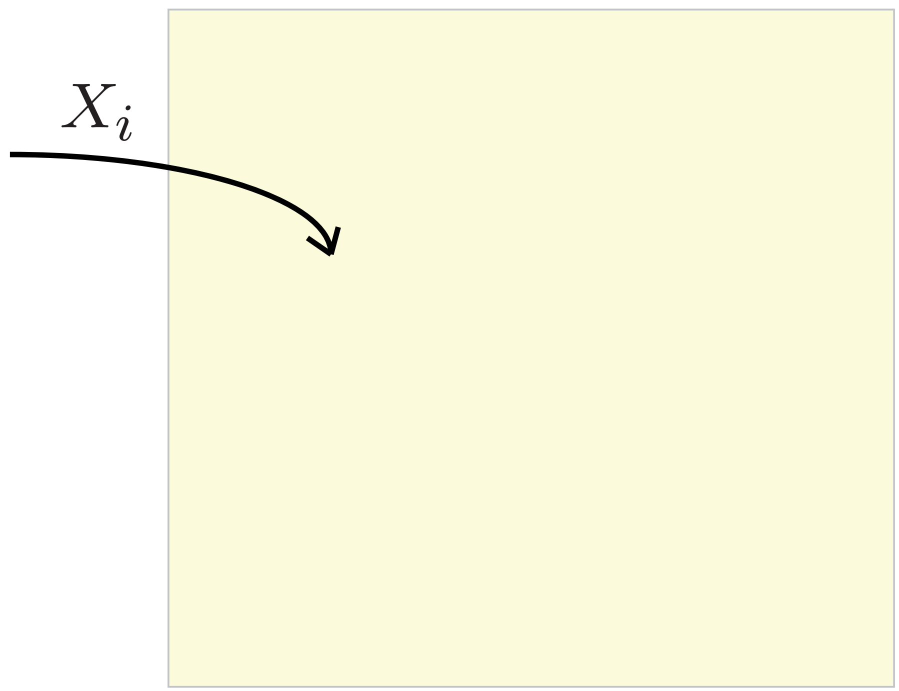
– am Exempel betrachtet

# 1. Die Fragestellung

## – in verschiedenen Verpackungen

$n$-mal wiederholt wird rein zufällig

ein Pixel aus $g = 10^6$ Pixeln gewählt.




$$i = 1, \ldots, n$$

$n$-mal wiederholt wird rein zufällig

ein Pixel aus $g = 10^6$ Pixeln gewählt.

Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei

lauter verschiedene Pixel gewählt werden?

Hand aufs Herz: Was schätzen Sie

für

$n = 100$ ?

$n = 1000$ ?

$n = 10000$ ?

Bei der “wiederholten zufälligen Pixelwahl”

handelt es sich um ein

Ziehen mit Zurücklegen.

Man kann auch denken an eine Urne

mit $g$ Kugeln, nummeriert mit $1, 2, \ldots, g$.

Es wird $n$-mal gezogen.

Nach jedem Zug wird die gezogene Kugel zurückgelegt,

vor jedem Zug wird “perfekt durchmischt”.

Tema con variazioni:

$n$ Objekte,

$g$ Plätze.

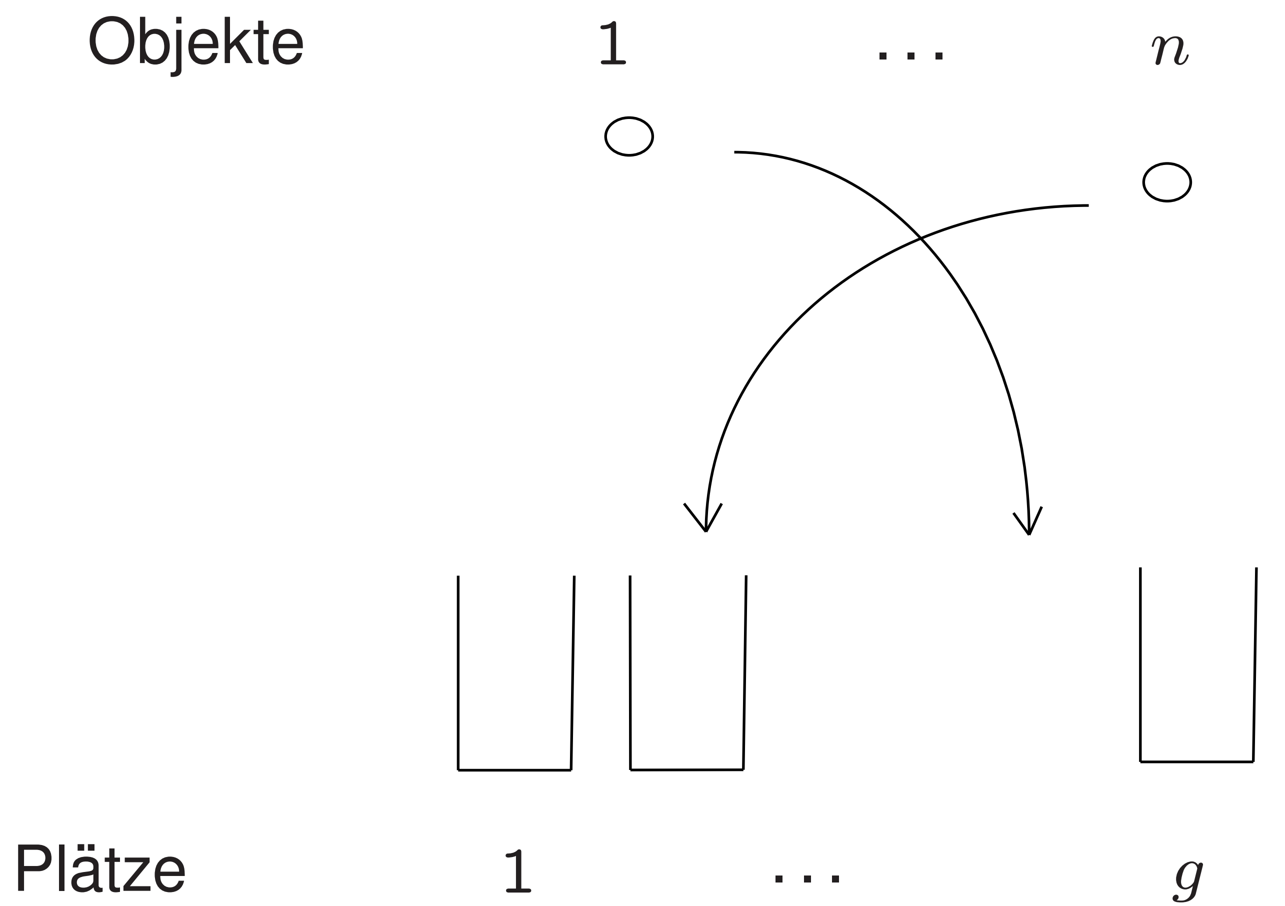
Jedes Objekt wird auf einen

rein zufällig ausgewählten Platz gesetzt.

(Mehrfachbelegungen sind erlaubt!)

Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei

keine Mehrfachbelegung ("Kollision") auftritt?




Anders als im Buch wird hier die Anzahl der Kennzeichen mit $g$ (und nicht mit $r$) bezeichnet - wegen des besseren typographischen Unterschieds von $g$ zu $n$ und der Assoziation von $g$ mit **G**esamtzahl der Plätze, **G**eburtstage,. . .

Populäre Version:

$n = 25$ Personen auf einer Party

Platz $\longleftrightarrow$ Geburtstag $\quad (\in \{1, 2, \ldots, 365\})$

Wie wahrscheinlich ist es,

dass keine zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

# 2. Beschreibung durch eine Zufallsvariable und ein Ereignis.

(Buch S. 2-3)

Die Objekte denken wir uns mit 1 bis $n$

und die Plätze mit 1 bis $g$ nummeriert.

Ein Ausgang der Platzwahl (ein "Wahlprotokoll")

lässt sich beschreiben durch das $n$-tupel

$$a = (a_1, \dots, a_n) \; ,$$

wobei $a_i$ den für das $i$-te Objekt gewählte Platz bezeichnet

$(1 \le a_i \le g)$.

Die Menge der möglichen Wahlprotokolle ist

$$S := \{1, \ldots, g\}^n \; ,$$

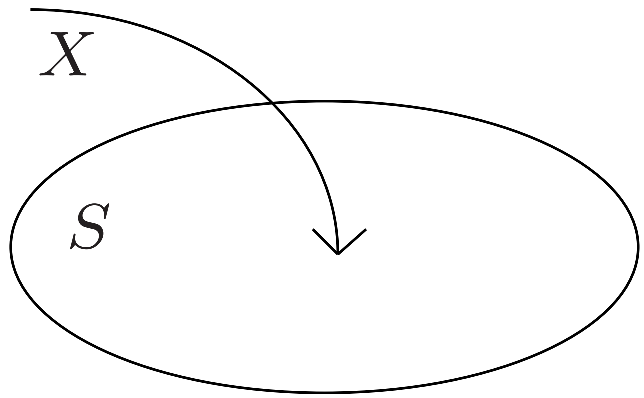
die Menge aller $n$-tupel $(a_1, \ldots, a_n)$

mit Einträgen (Komponenten)

$$a_i \in \{1, \ldots, g\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Die zufällige Platzwahl

beschreiben wir durch eine $S$-*wertige Zufallsvariable* $X$.




$X$ kommt durch zufällige Wahl

eines Elementes aus $S$ zustande.

Die Menge $S$ heißt *Zielbereich* (oder *Wertebereich*)

der Zufallsvariable $X$.

Wie jedes Element $(a_1, \ldots, a_n)$ unserer Menge $S$

besteht auch die Zufallsvariable $X$ aus $n$ Komponenten:

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \, .$$

Wir interessieren uns für das *Ereignis*,

dass keine zwei Komponenten von $X$ gleich sind.

Dieses Ereignis schreiben wir als

$$\{X_i \neq X_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

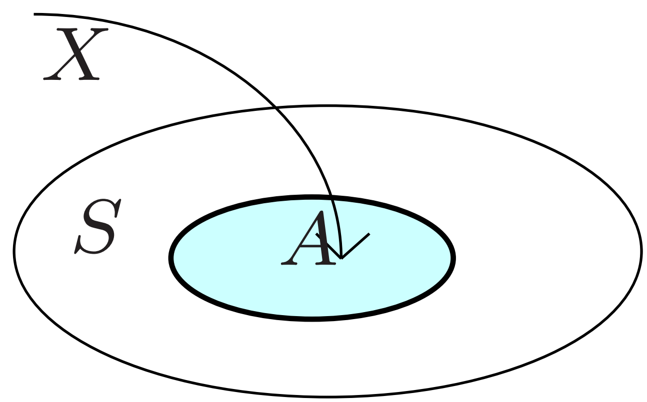
oder auch als

$$\{X \in A\}$$

mit der Teilmenge

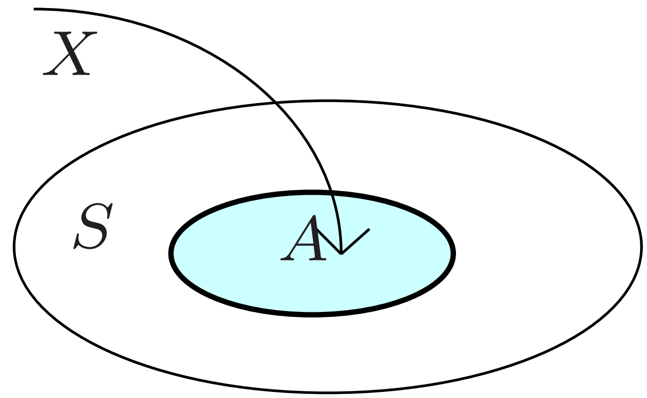
$$A := \{a \in S \,:\, a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\} \,.$$

Ein Logo für das Ereignis $\{X \in A\}$:



# 3. Die Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit

(Buch S. 3)




Wie kommt man zur **Wahrscheinlichkeit**

des Ereignisses $\{X \in A\}$ ?

Zum Merken:

*Wahrscheinlichkeiten* gehören zu Ereignissen.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

misst dessen Chance einzutreten

mit einer Zahl zwischen $0$ und $1$:

Zum Merken:

*Wahrscheinlichkeiten* gehören zu Ereignissen.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

misst dessen Chance einzutreten

mit einer Zahl zwischen 0 und 1:

$$\mathbf{P}(\{X \in A\})$$

Statt $\mathbf{P}(\{X \in A\})$

schreiben wir kurz

$$\mathbf{P}(X \in A)$$

Statt $\mathbf{P}(X \in \{a\})$

schreiben wir kurz

$$\mathbf{P}(X = a)$$

Zwei einleuchtende Regeln

für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1 \, .$$

d.h. das *sichere Ereignis* $\{X \in S\}$ hat Wahrscheinlichkeit 1

(Normierung auf Eins)

und (bei endlich vielen möglichen Ausgängen, d.h. $\#S < \infty$)

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a)$$

(Additivität.)

Um die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(X \in A)$ berechnen zu können,

muss man eine Modellannahme treffen.

Eine prominente Modellannahme ist die einer

*rein zufälligen Wahl*.

Damit ist gemeint, dass für je zwei $a, a' \in S$

$$\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = a').$$

Das heißt: kein Ausgang ist bevorzugt.

Also:

$$P(X = a) = \frac{1}{\# S}\,, \quad a \in S\,.$$

Und

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\# A}{\# S}\,.$$

Wir haben nun die Aufgabe des Abzählens der zwei Mengen

$$S := \{1, \ldots, g\}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : 1 \leq a_i \leq g\}$$

und

$$A := \{a \in S \ : \ a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#S = g^n$$

$$S = \{(a_1, \ldots, a_n) : 1 \leq a_i \leq g\}$$

$$A := \{a \in S \;:\; a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#A = ?$$

Für $a_1$ gibt es $g$ mögliche Werte, für $a_2$ dann noch $g - 1$, usw. Also:

$$\#A = g(g-1)\cdots(g-(n-1))$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{g(g-1)\cdots(g-(n-1))}{g^n}$$

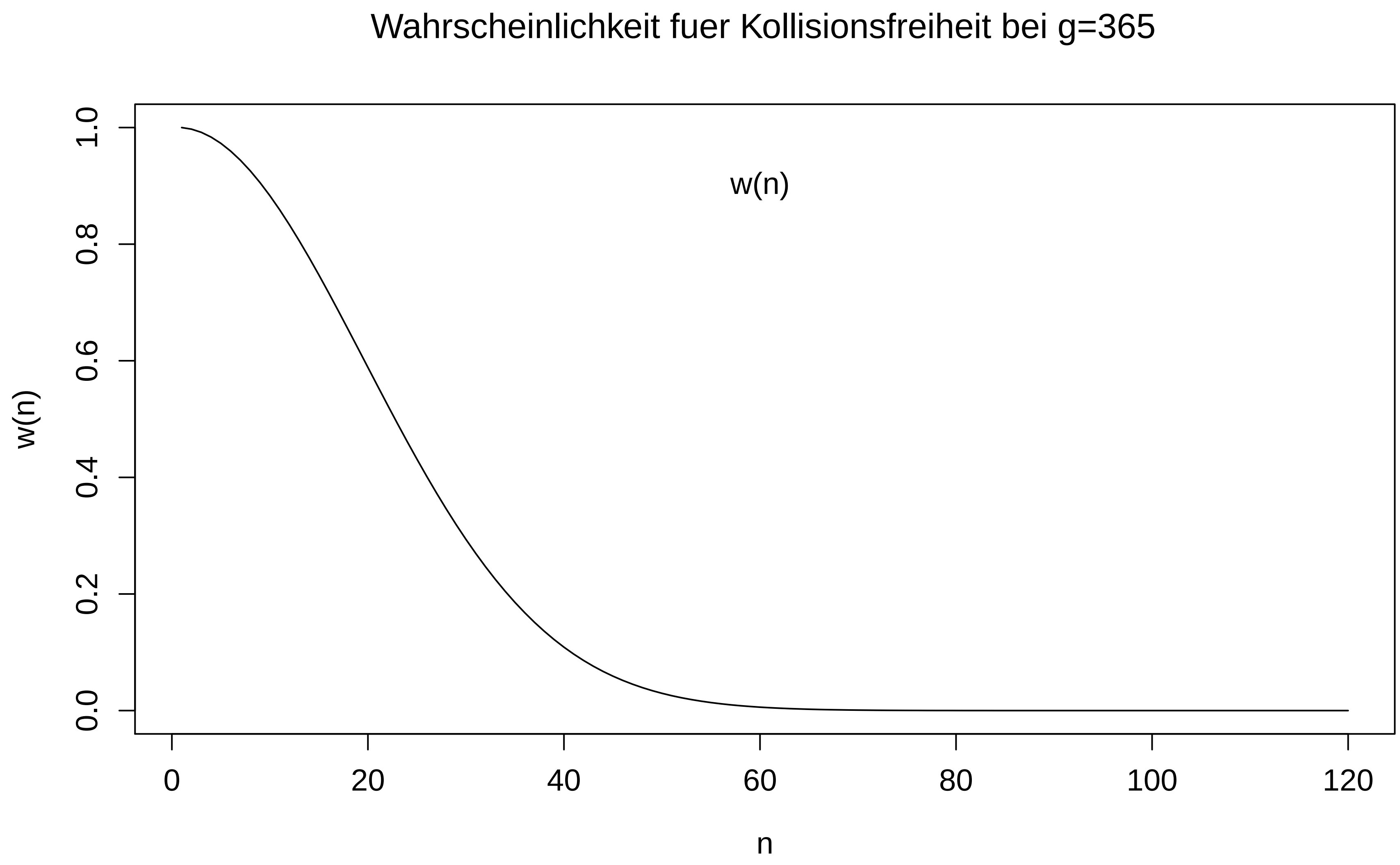
$$= \frac{g-1}{g}\,\frac{g-2}{g}\cdots\frac{g-(n-1)}{g}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{g}\right) =: w(n,g)$$

ist die Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit

bei der $n$-maligen wiederholten rein zufälligen Platzwahl

aus $g$ Plätzen



Wahrscheinlichkeit fuer Kollisionsfreiheit bei g=365
w(n)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
w(n)
0
20
40
60
80
100
120
n

# 4. Der Zeitpunkt der ersten Kollision und seine Verteilung

Ein dynamisches Bild:

Wir denken uns $g$ fest und lassen $n$ laufen $(n = 1, 2, ..)$

Vorstellung: Ein Objekt nach dem anderen wird auf einen (immer wieder neu) rein zufällig gewählten Platz gesetzt.

Die Folge $(X_1, X_2, \ldots)$ der gewählten Plätze ist dann eine rein zufällige $1 \ldots g$-Folge

$E_n$ := das Ereignis “keine Kollision bis (einschließlich) $n$”

Die Zufallsvariable $T$:= Zeitpunkt der ersten Kollision

ist ablesbar aus $(X_1, X_2, \ldots)$:

$$T = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists i < n : X_i = X_n\}$$

Es gilt

$$E_n = \{T > n\}$$

also insbesondere auch

$$w(n) = \mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(T > n).$$

$$w(n) = \mathbf{P}(T > n)$$

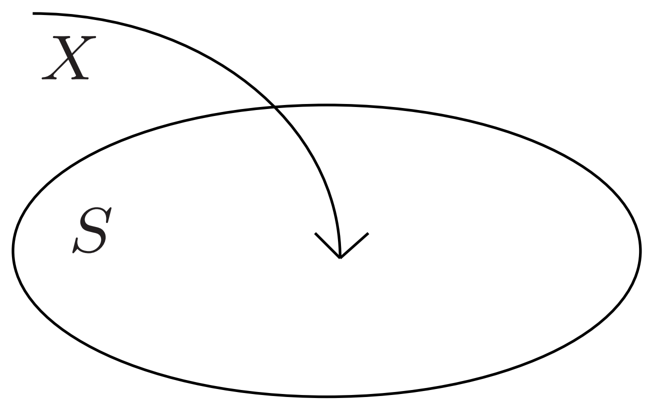
Aus der Additivität der Wahrscheinlichkeit bekommen wir die

Verteilungsgewichte der $\mathbb{N}$-wertigen Zufallsvariablen $T$:

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(T > n-1) - \mathbf{P}(T > n) = w(n-1) - w(n).$$

# 5. Die wichtigsten Begriffe der Stochastik: Zufallsvariable, Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen

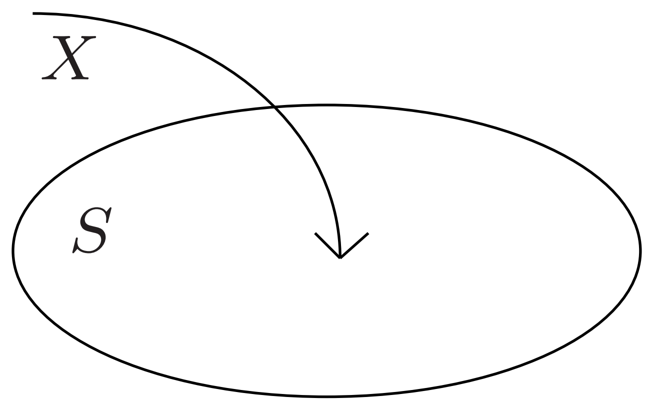
Ein Logo der Elementaren Stochastik:




$X$ . . . zufällige Wahl eines Elements aus $S$

$S$ . . . Menge von möglichen Ausgängen

Ein Logo der Elementaren Stochastik:




$X$ ... **Zufallsvariable**

mit **Zielbereich** (oder **Wertebereich** $S$

(kurz: eine $S$-wertige Zufallsvariable)

Zum Beispiel wie in V1a1:

$S :=$ die Menge der Nordostpfade der Länge 4,

die im Punkt (2,1) starten

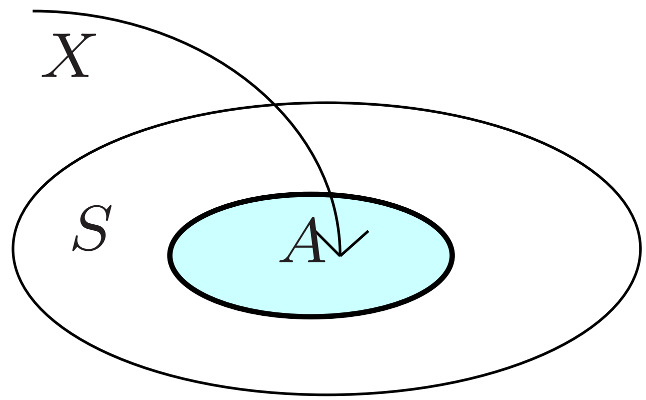
Oder so wie heute:

$$S := \{1, \ldots, g\}^n$$

die Menge der Wahlprotokolle beim $n$-maligen Besetzen von jeweils $g$ möglichen Plätzen

Wir interessieren uns für ein *Ereignis*

der Form “$X$ fällt in $A$”




Dabei ist $A$ eine bestimmte Teilmenge von $S$.

In V1a1 war

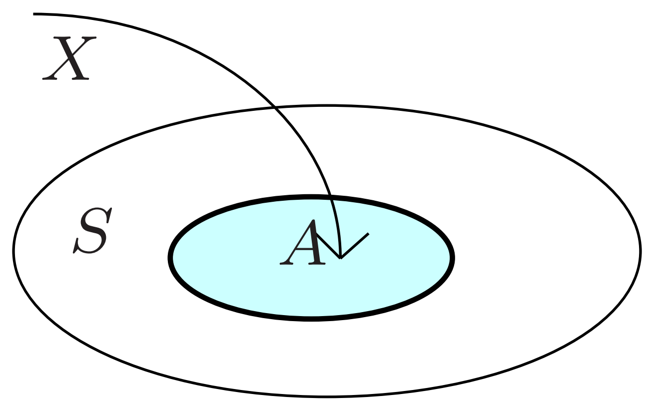
$A :=$ die Menge der Nordostpfade der Länge 4,

die im Punkt (2,1) starten

und das Quadrat $\{1,2,3,4\}^2$ über den Ostrand verlassen.

In der heutigen Vorlesung war

$A :=$ die Menge der kollisionsfreien Wahlprotokolle




Ereignisse werden (wie Mengen)

in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$

Lies:

"$X$ fällt in $A$".

Sei $S$ eine endliche Menge.

“Die Zufallsvariable $X$ ist uniform verteilt auf $S$”

heißt dann:

alle Elemente von $S$ haben die gleiche W’keit

von $X$ gewählt zu werden.

Man nennt $X$ dann ein *rein zufälliges Element* von $S$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “$X$ fällt in $A$” ist dann

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Die in Abschnitt 4 betrachtete Situation der fortgesetzten rein zufälligen Wahl $X$ aus $\{1, \dots, g\}$ weist über den Fall endlicher Wertebereiche hinaus.

Wir haben dann

$$S = \{1, \dots, g\}^{\mathbb{N}}.$$

Die $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable $T$

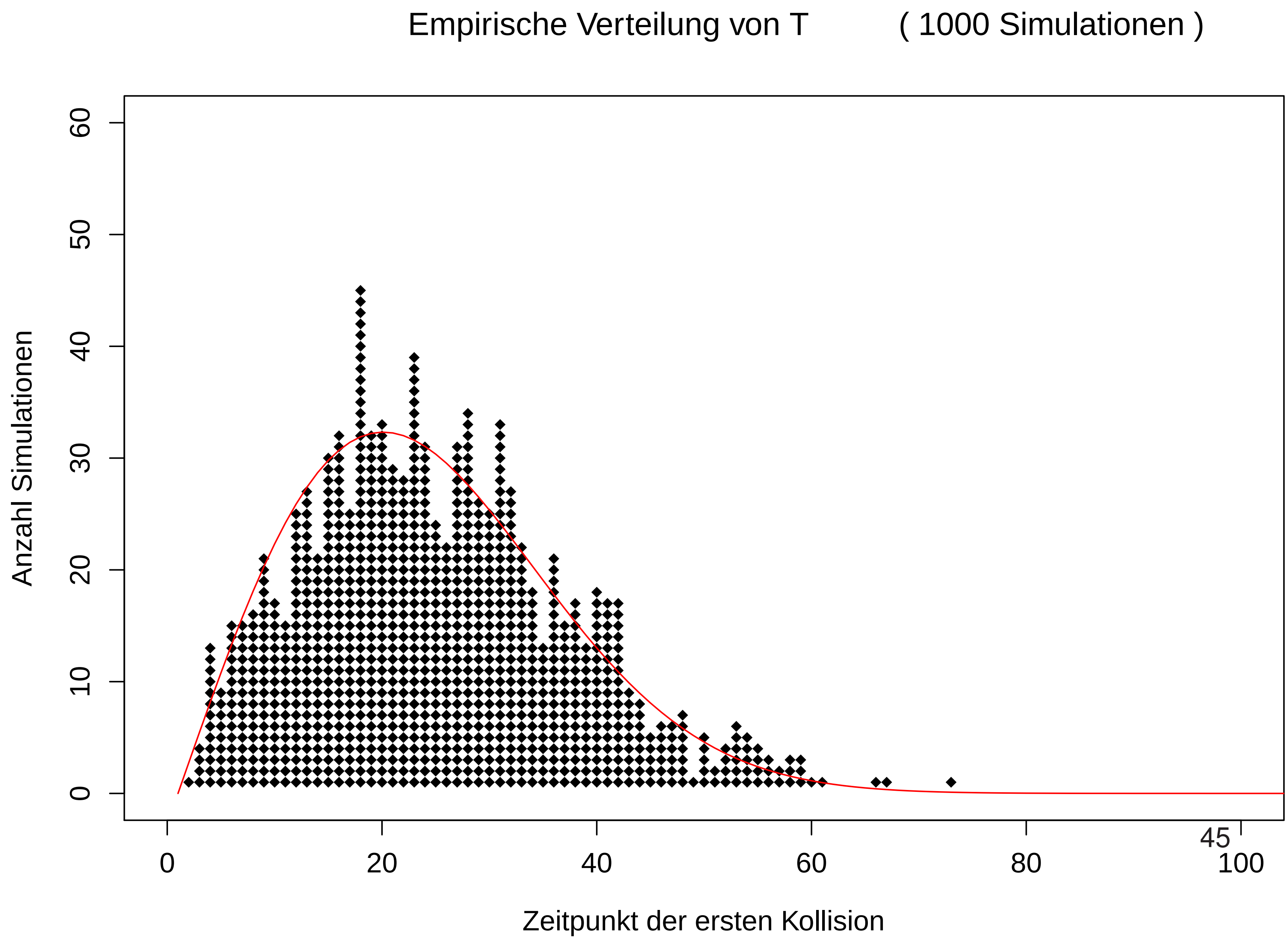
(den Zeitpunkt der ersten Kollision) haben wir bekommen

als “Verarbeitung” des zufälligen Wahlprotokolls $X$:

$T = h(X)$ mit passendem $h : S \to \mathbb{N}$.

Die Gewichte der Verteilung von $T$ ergeben sich dann als

$$\mathbf{P}(T = b) = \mathbf{P}(X \in h^{-1}(b)), \quad b \in \mathbb{N}.$$


Empirische Verteilung von T ( 1000 Simulationen )
Anzahl Simulationen
0
10
20
30
40
50
60
0
20
40
60
80
100
45
Zeitpunkt der ersten Kollision