

Vorlesung 1a

Teil 3:

Reproduktionszahl und Aussterbewahrscheinlichkeit:

Ein Widerstreit von Trend und Variabilität

Was passiert, wenn wir im Modell aus Teil 2
die Parameter ändern?

Nicht 0 oder 3 Kinder, sondern 0 oder 5 Kinder?

Und “zum Ausgleich” die W'keit für Kinderlosigkeit erhöhen,
von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{2}{3}$?

Die jetzt betrachtete Parameterkonstellation::

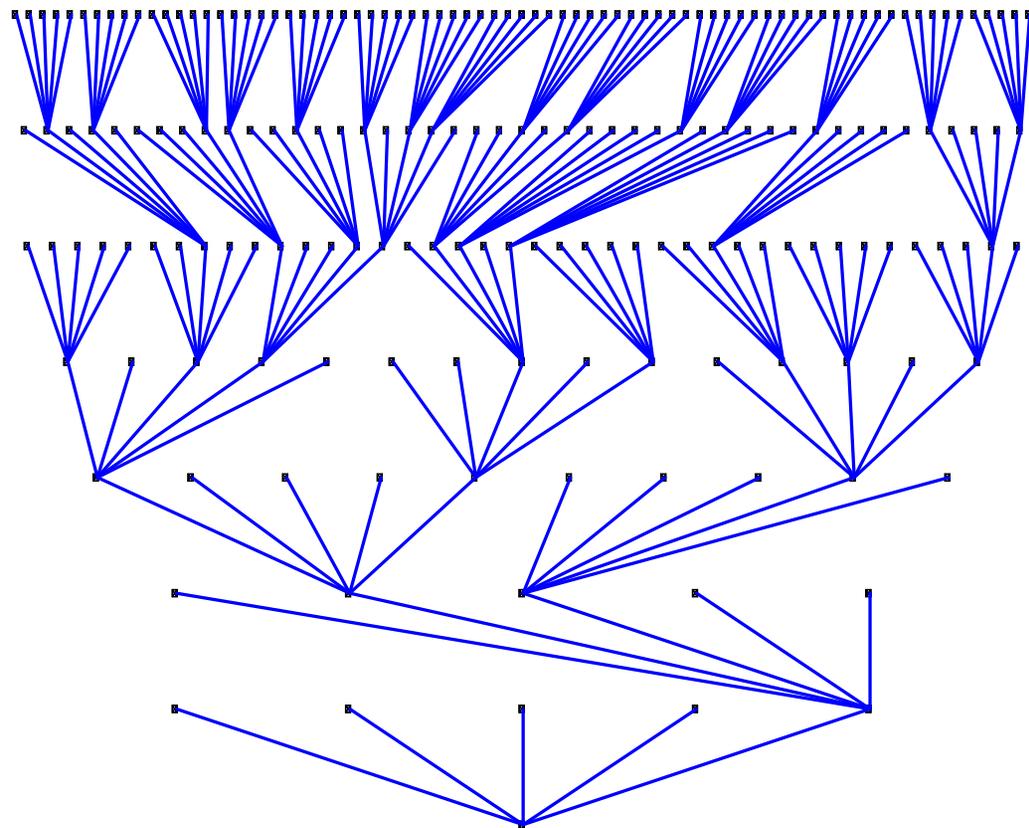
Jedes Individuum hat

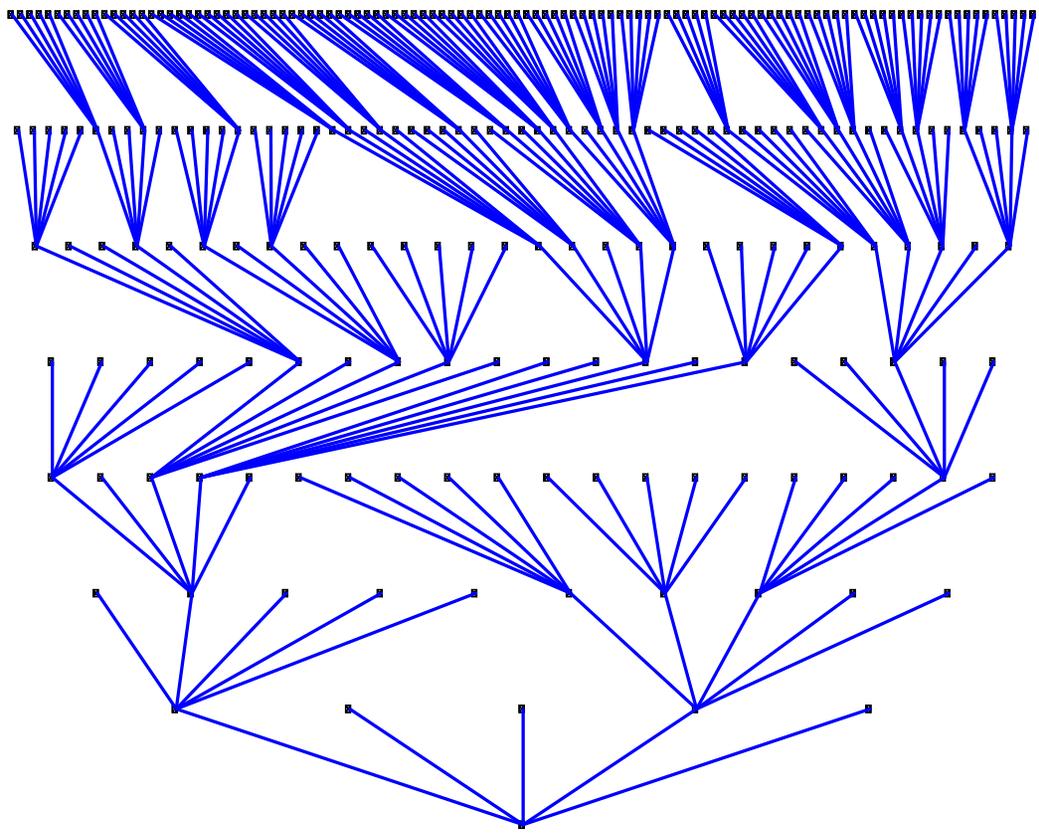
- 0 Kinder mit Wahrscheinlichkeit $2/3$
- 5 Kinder mit Wahrscheinlichkeit $1/3$.

Wir sprechen hier vom $GW(5,1/3)$ -Modell (kurz $GW5$)
(im Unterschied zum $GW(3,1/2)$ -Modell (kurz $GW3$)
von vorhin).

Die Reproduktionszahl bei $GW5$ ist

$$\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}.$$





Die Reproduktionszahl in **GW5** ist größer als die in **GW3**:

$$\frac{5}{3} > \frac{3}{2}.$$

Ist also die Aussterbewahrscheinlichkeit
in **GW5** kleiner als die in **GW3**?

Analog zur vorherigen Gleichung

$$w(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}w(1)^3$$

ergibt sich jetzt

$$w(1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}w(1)^5$$

$$\alpha = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\alpha^5$$

Wieder spalten wir die Lösung 1 ab und erhalten

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 2 = 0,$$

mit der einzigen positiven Lösung

$$w(1) \approx 0.74.$$

Aussterbewahrscheinlichkeit

in **GW5**: 0.74,

in **GW3**: 0.62.

In **GW5** sterben ca. drei von vier Bäumen aus
in **GW3** nur weniger als zwei von drei.

Größere Reproduktionszahl
und trotzdem größere Aussterbewe'keit?

Wie soll man das verstehen?

Allerdings ist ja auch die Variabilität der Kinderzahl
(von Individuum zu Individuum) in **GW5** größer als in **GW3** !

Es kommt zu einem Wettstreit von Trend
und Fluktuationen in den frühen Generationen.

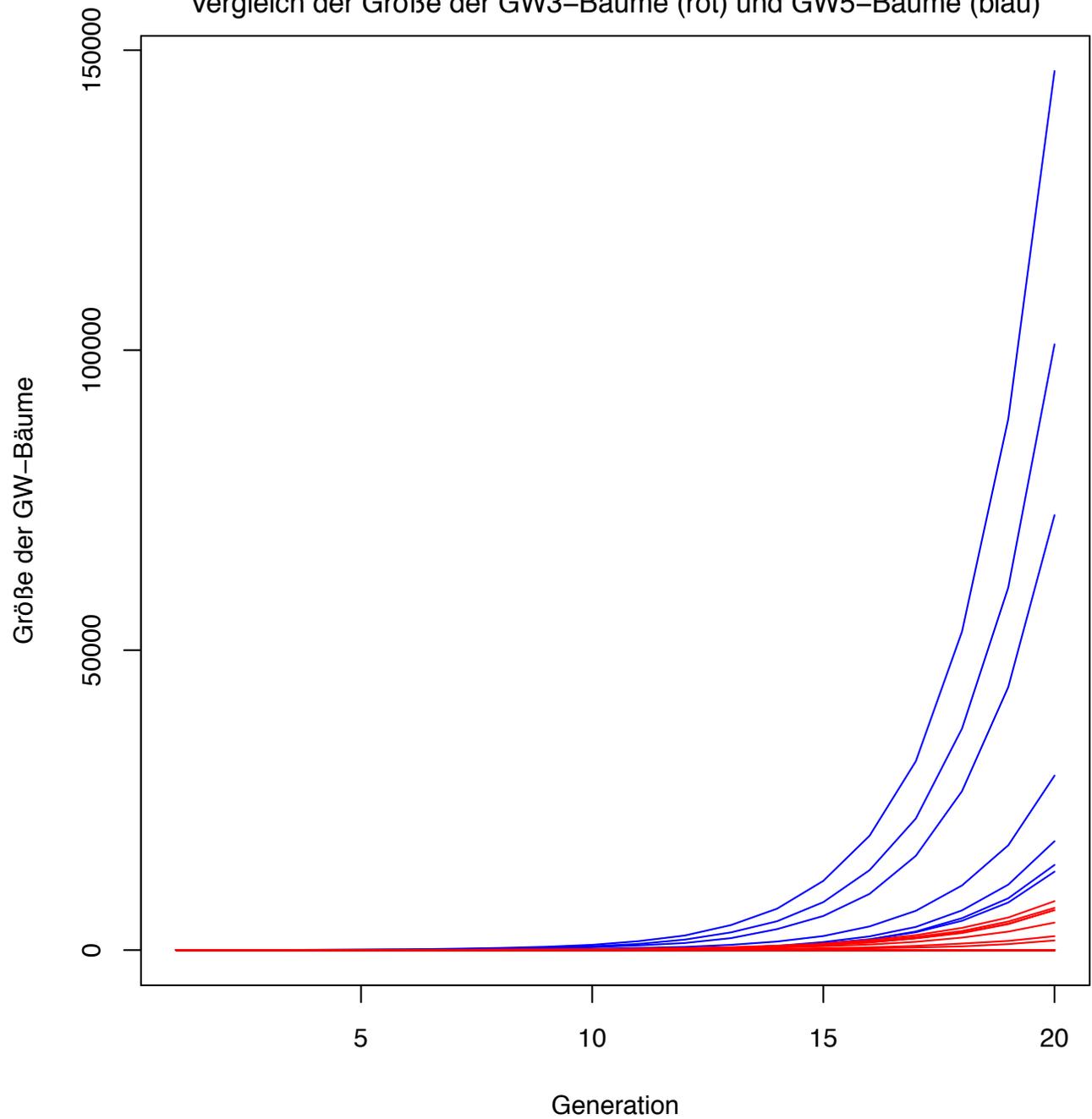
Bei denjenigen Bäumen, die “in den Himmel wachsen”,
schlägt das exponentielle Wachstum
mit den Faktoren $\frac{3}{2}$ bzw. $\frac{5}{3}$ durch.

Aber das Wirken des Zufalls in den ersten paar Generationen
hinterlässt auch bei diesen Bäumen am Ende seine Spuren!

Die folgenden beiden Bilder zeigen je 6 zufällige
Populationsgrößen-Verläufe in **GW5** und **GW3**.

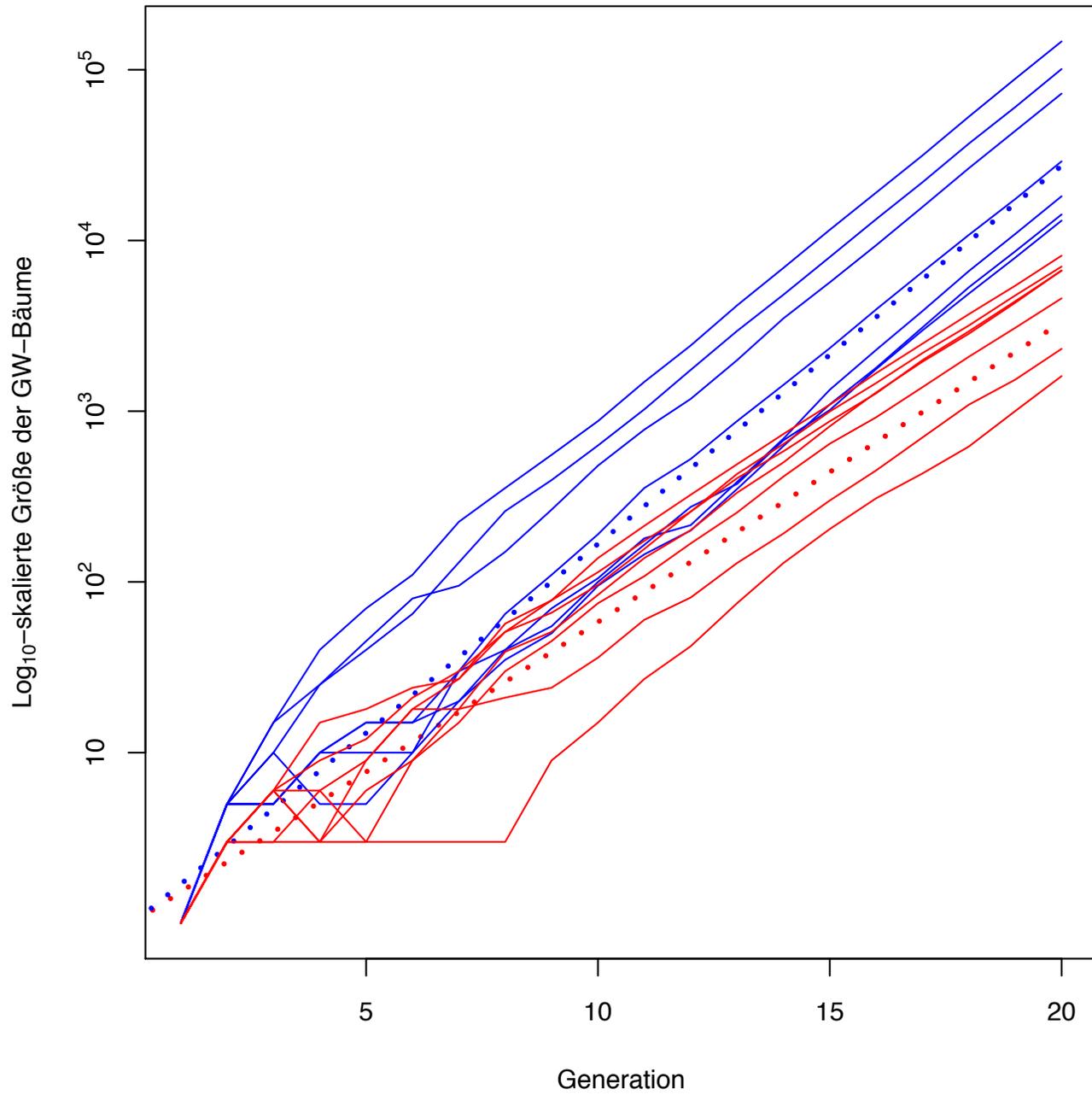
Man sieht exponentielles Wachstum:

Vergleich der Größe der GW3-Bäume (rot) und GW5-Bäume (blau)



Noch deutlicher (und übersichtlicher) wird das
in einer logarithmischen Skala:
Die Logarithmen wachsen linear,
alle roten Pfade haben
asymptotisch ein-und dieselbe Steigung,
alle blauen Pfade
haben asymptotisch ein-und dieselbe Steigung.

Vergleich der Größe der GW3-Bäume (rot) und GW5-Bäume (blau)



Die verschiedenen Ordinatenabschnitte
der “asymptotischen Geraden”
entsprechen verschiedenen Vorfaktoren
der Exponentialkurven in der
gewöhnlichen (nicht logarithmischen) Darstellung

(und kommen von den zufälligen Schicksalen der Bäume
in den frühen Generationen).

Je 4 Bäume von **GW5** und **GW3**, die bis Generation 7 überlebt haben
(und mit hoher W'keit auch "schließlich und endlich" überleben werden)

