# Vorlesung 1a

## Teil 2:

## Aussterbewahrscheinlichkeiten

## von Verzweigungsprozessen

## - berechnet à la Pascal

Wir betrachten einen zufälligen Reproduktionsprozess:

Jedes Individuum hat

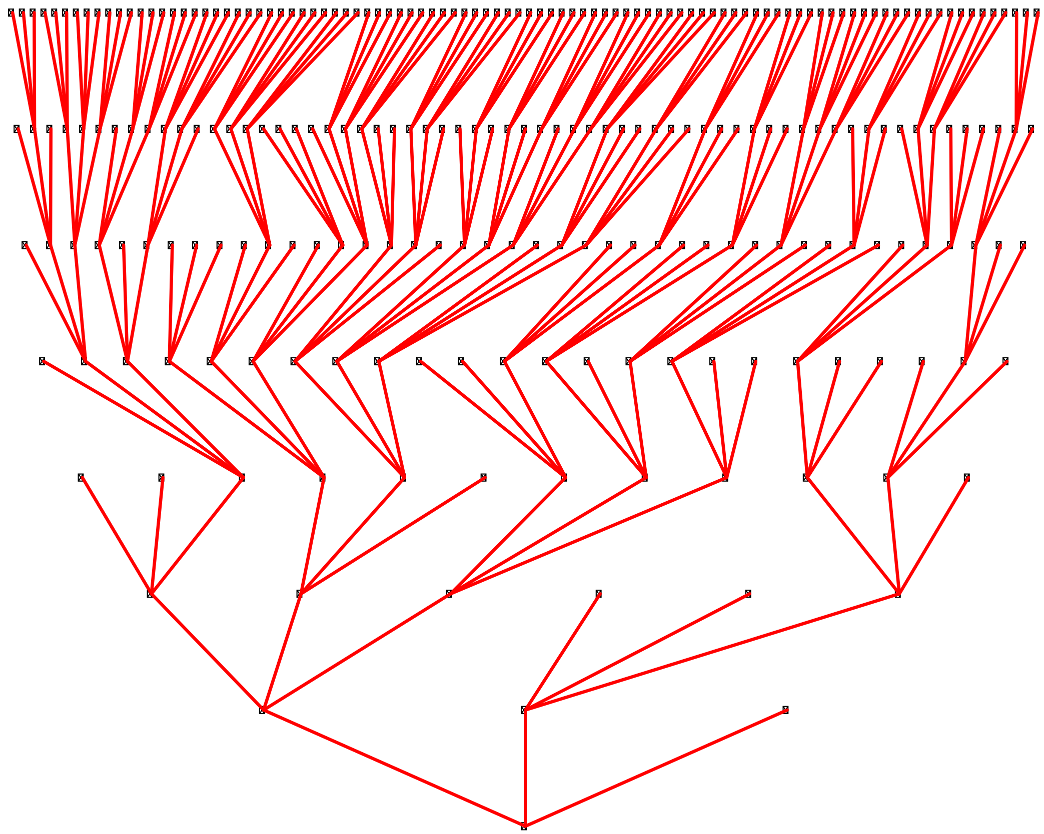
entweder 0 oder 3 Kinder, jeweils mit W'keit 1/2,

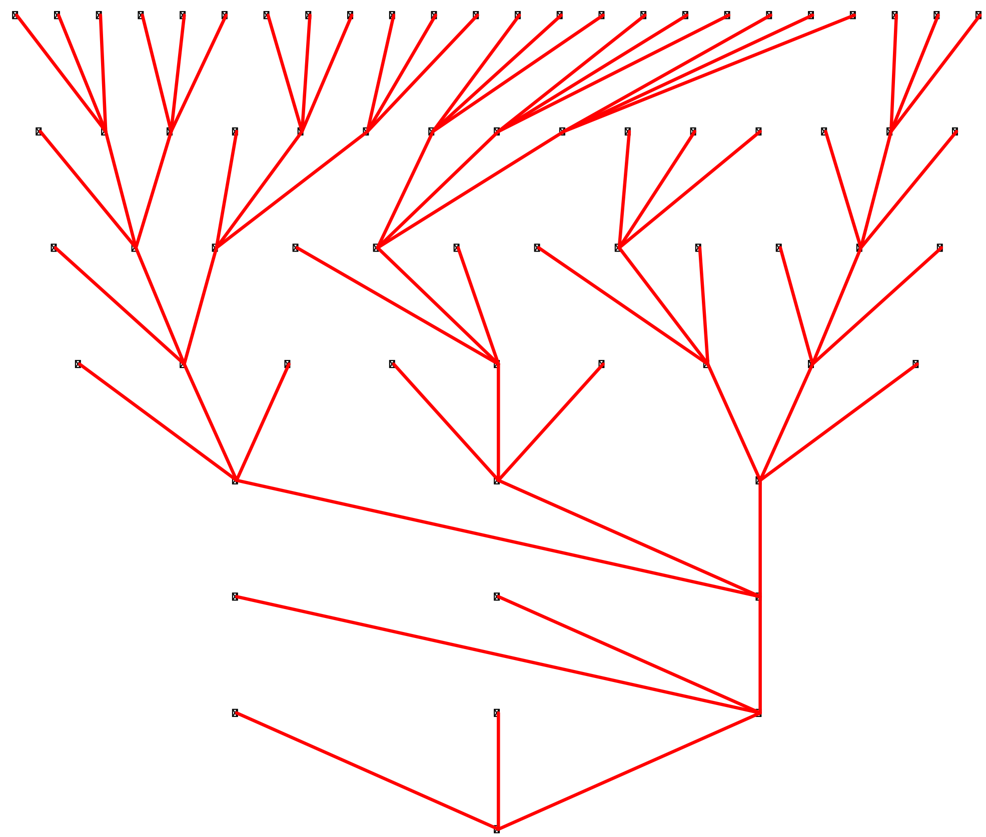
und die zufälligen Kinderzahlen sind

von Individuum zu Individuum "unabhängig", d.h.

"ausgewürfelt" nach dem Prinzip "Neues Spiel, neues Glück".

Man beginnt mit einem Individuum in Generation 0.





Wie stehen die Chancen, dass der Prozess ausstirbt?

$w(k) :=$ die Aussterbew'keit bei Start in $k$ Ahnen

Schlüsselbeobachtung: $\boxed{w(k) = w(1)^k}$

Und wir erinnern uns an die Erkenntnis aus Teil 1:

$$\begin{tikzcd} y & \\ x \arrow[u, "\frac{1}{2}"] \arrow[r, "\frac{1}{2}"'] & z \end{tikzcd}$$

$$w(x) = \frac{1}{2}w(y) + \frac{1}{2}w(z)$$

Zerlegung nachdem ersten Schritt (à la Pascal):

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ 1 \arrow[u, "\frac{1}{2}"] \arrow[r, "\frac{1}{2}"'] & 3 \end{tikzcd}$$

$$w(1) = \frac{1}{2} w(0) + \frac{1}{2} w(3)$$

$$w(0) = 1, \quad w(3) = w(1)^3$$

$$w(1) = \tfrac{1}{2}(1 + w(1)^3)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \alpha^3$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $1$.

Am Ende von V1a werden wir sehen: $w(1) < 1$.

Also spalten wir die Lösung 1 ab und erhalten

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0,$$

mit der einzigen positiven Lösung

$$w(1) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \approx 0.62$$

Die **Aussterbewahrscheinlichkeit** ist 0.62.

Salopp formuliert:

*Im Schnitt*

*sterben etwas weniger als zwei von drei Bäumen aus.*

*Im Schnitt*

*wächst gut einer von drei Bäumen über alle Grenzen.*

Diese Redeweisen werden wir später präzisieren.

Mit welchem Populationswachstum

"entlang der Generationen"

soll man rechnen?

Die *Reproduktionszahl*, d.h.

die mittlere Kinderzahl eines Individuums, ist

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Mit diesem “Verzinsungsfaktor” $\frac{3}{2}$ ist

von einer Generation zur nächsten zu multiplizieren:

die *erwartete* Populationsgröße in Generation 2 ist somit

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Allerdings ist der Prozess schon nach einer Generation

mit Wahrscheinlichkeit 1/2 ausgestorben

(und stirbt “schließlich und endlich” mit W’keit 0.62 aus).