

Vorlesung 1a

Pascals Idee der Rückwärtsinduktion
- ein Auftakt der Stochastik

Teil 1:

Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Die Lösungen von Fermat und Pascal

(vgl. Buch Seite 102/103)

Wir versetzen uns ins Jahr 1654.

Damals wurde in der Korrespondenz zwischen Pascal und Fermat ein Meilenstein in der Konzeption derjenigen mathematischen Disziplin gesetzt, der Jakob Bernoulli ein paar Jahrzehnte später den Namen Stochastik geben sollte sollte

(vom griechischen $\sigma\tau\omicron\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ – scharfsinnig im Vermuten).

Die Aufgabe:

A und B spielen ein faires Spiel.

In jeder Runde gewinnt entweder A oder B,
pro Runde stehen die Gewinnchancen 1:1.

Und: Neue Runde, neues Glück!

Derjenige gewinnt den gesamten Einsatz,
welcher als erster 4 Runden gewonnen hat.

Nachdem A zwei und B eine Runde gewonnen hat,
muss das Spiel abgebrochen werden.

Wie ist der Einsatz gerecht aufzuteilen?

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

A gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Osten

B gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Norden

B



A

Jede Runde geht mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ an A
und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ an B.

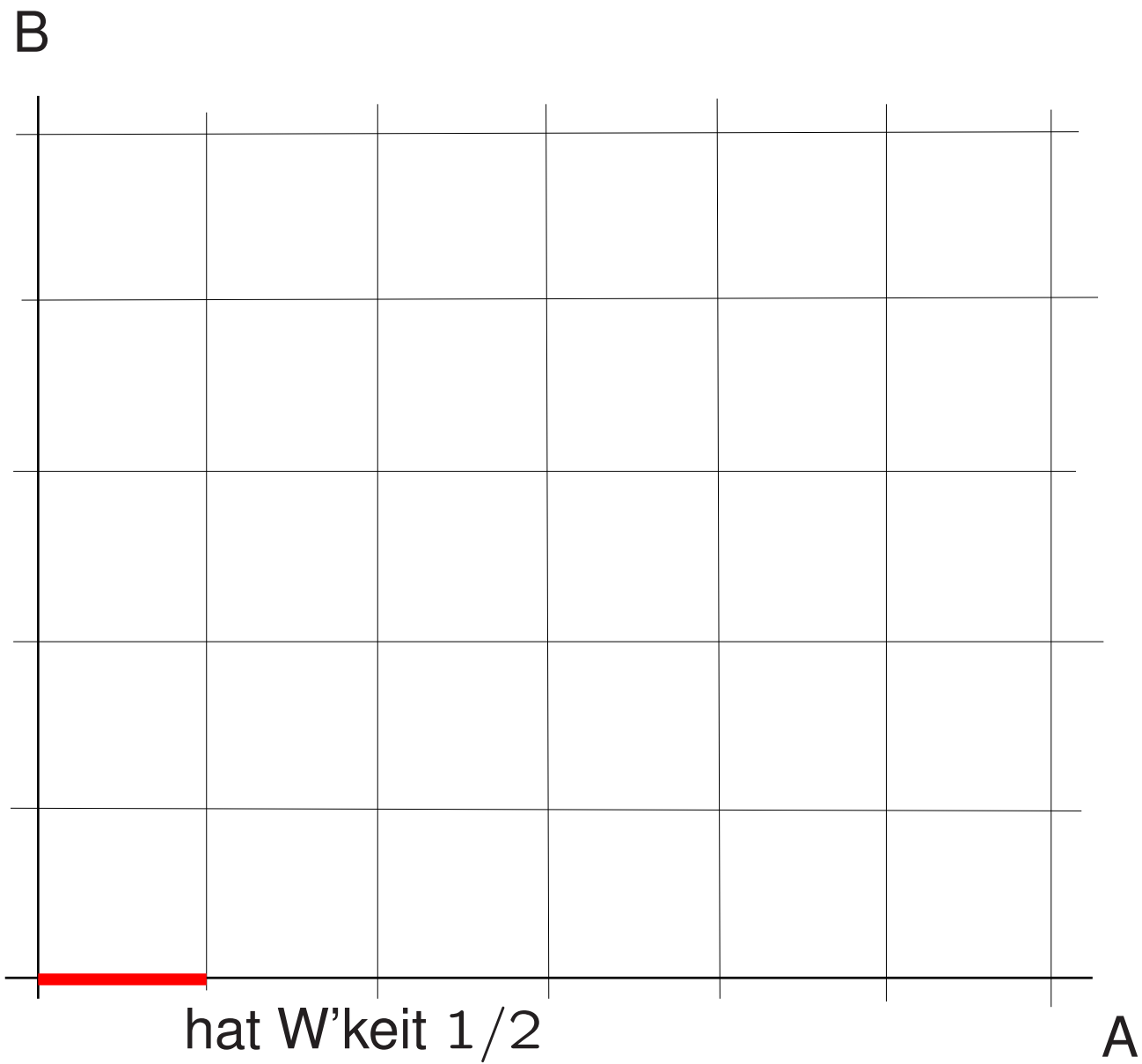
Neue Runde, neues Glück.

Modell des “fairen Münzwurfs”

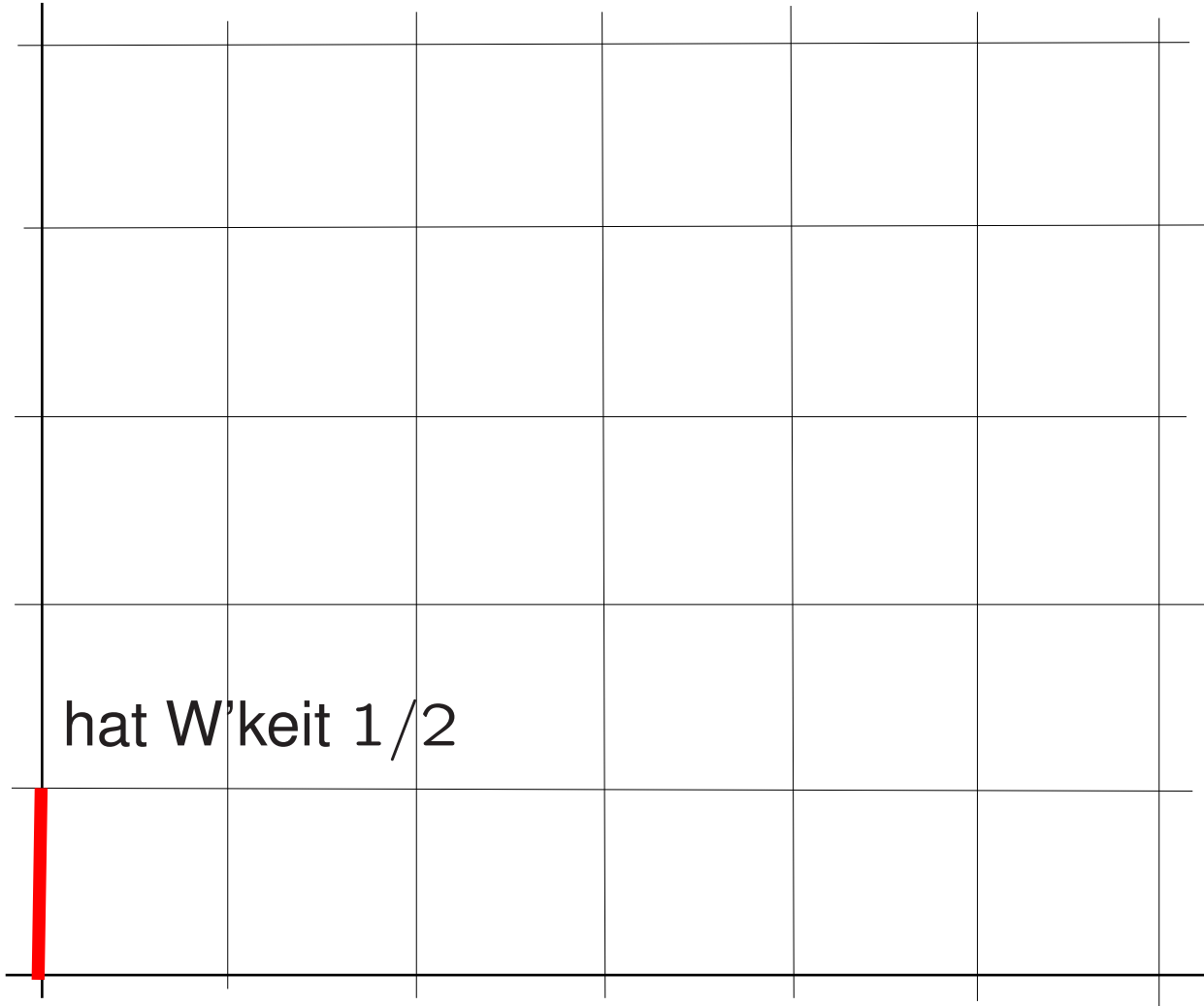
B



A



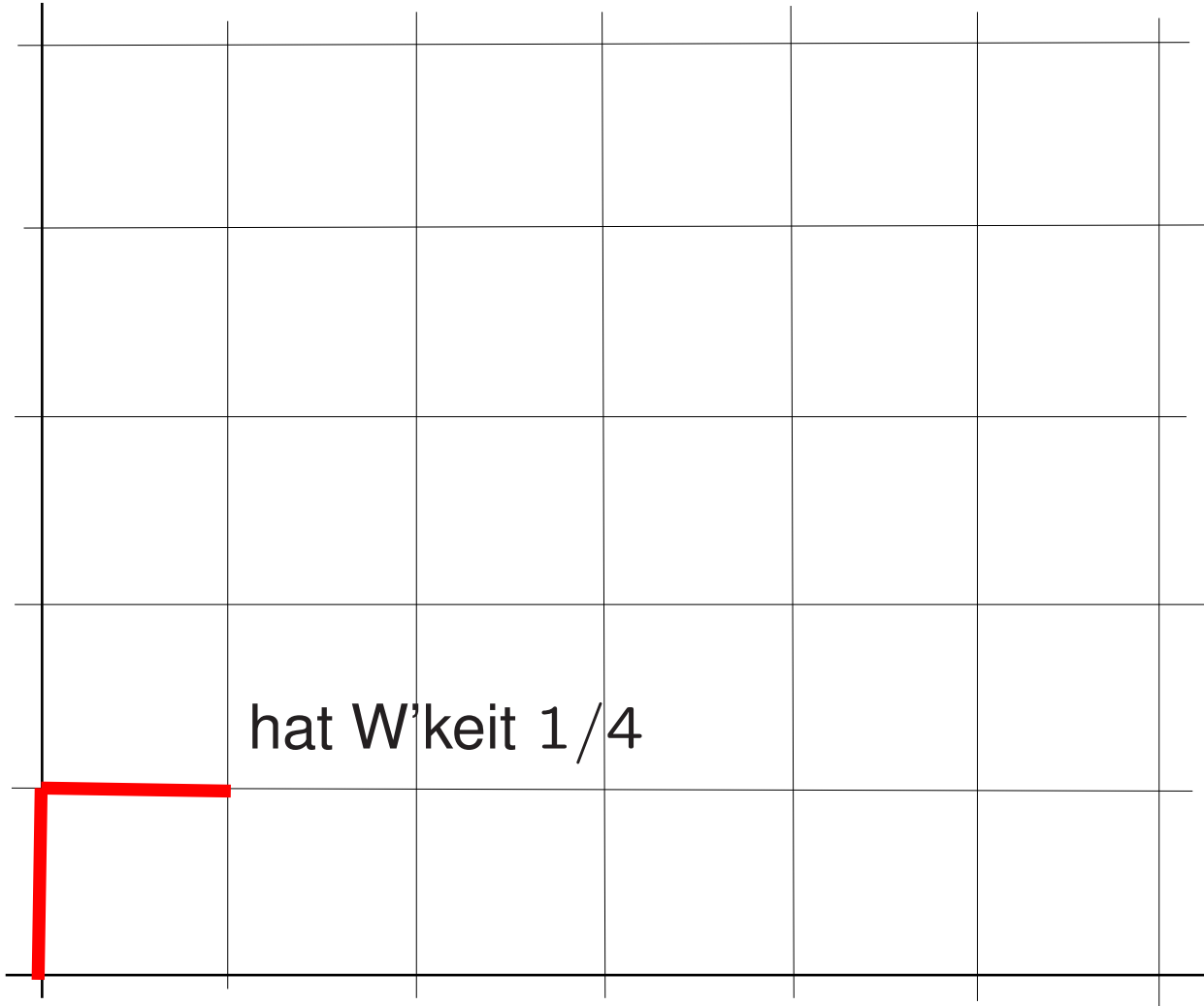
B



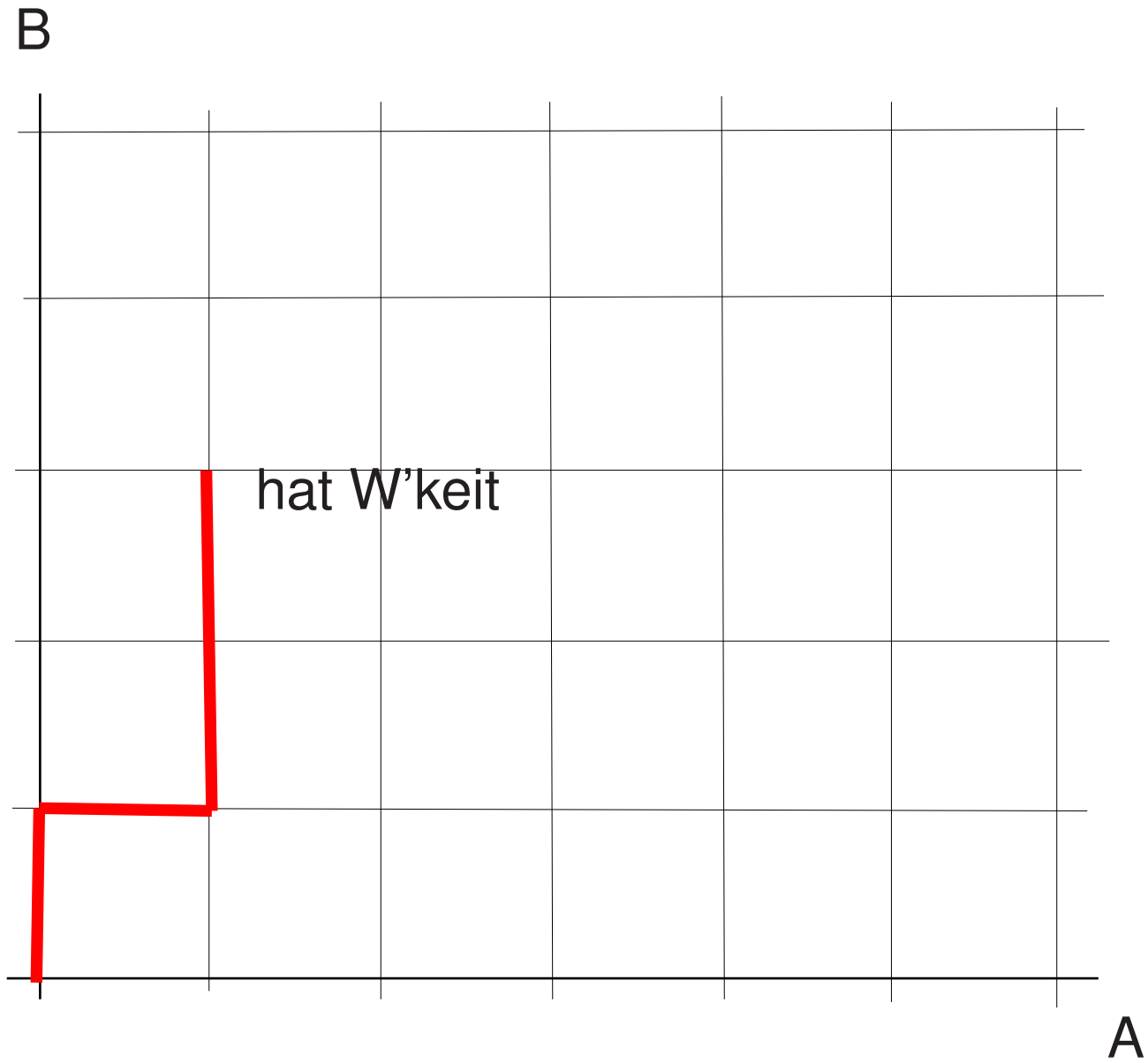
hat W'keit 1/2

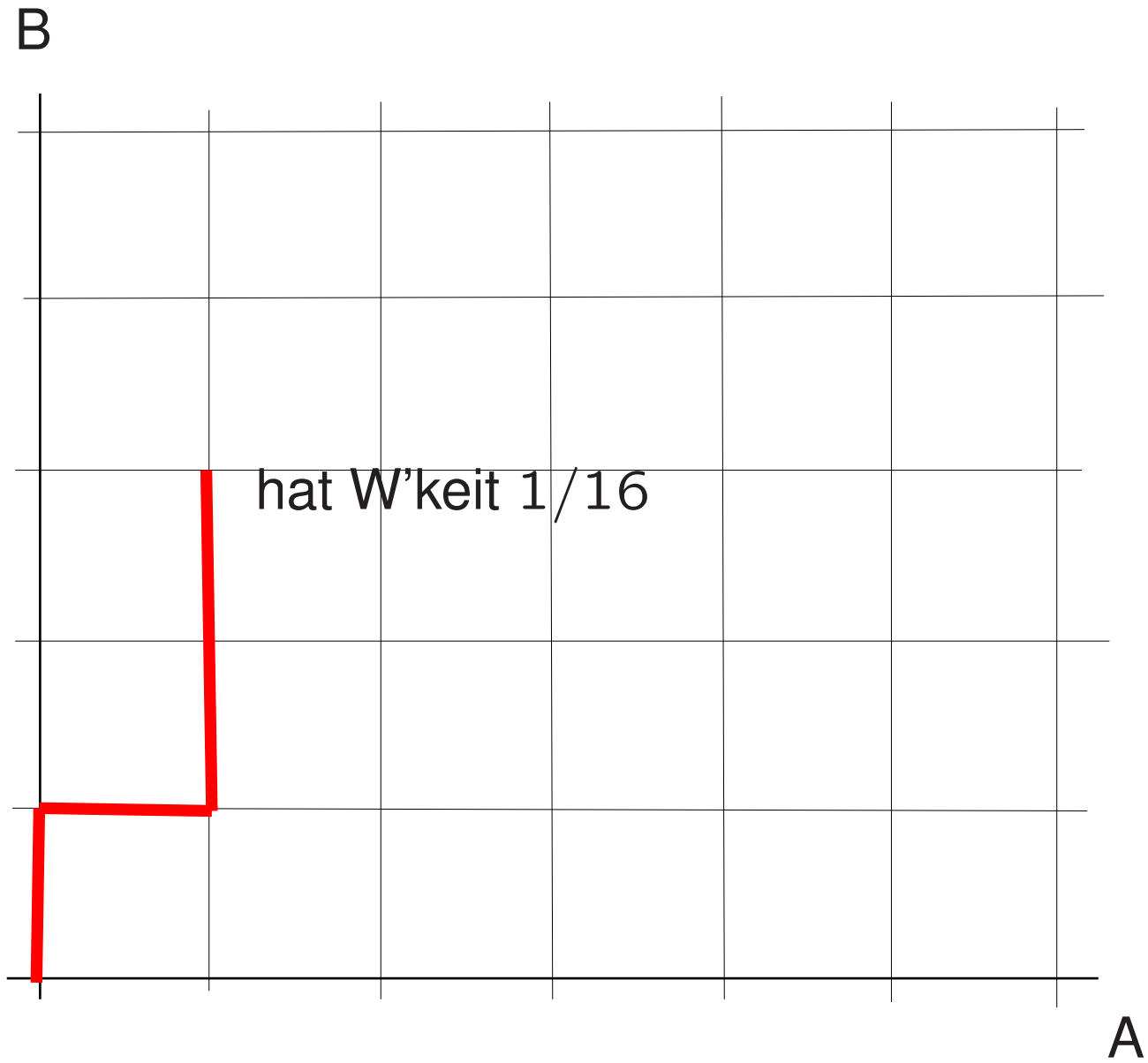
A

B

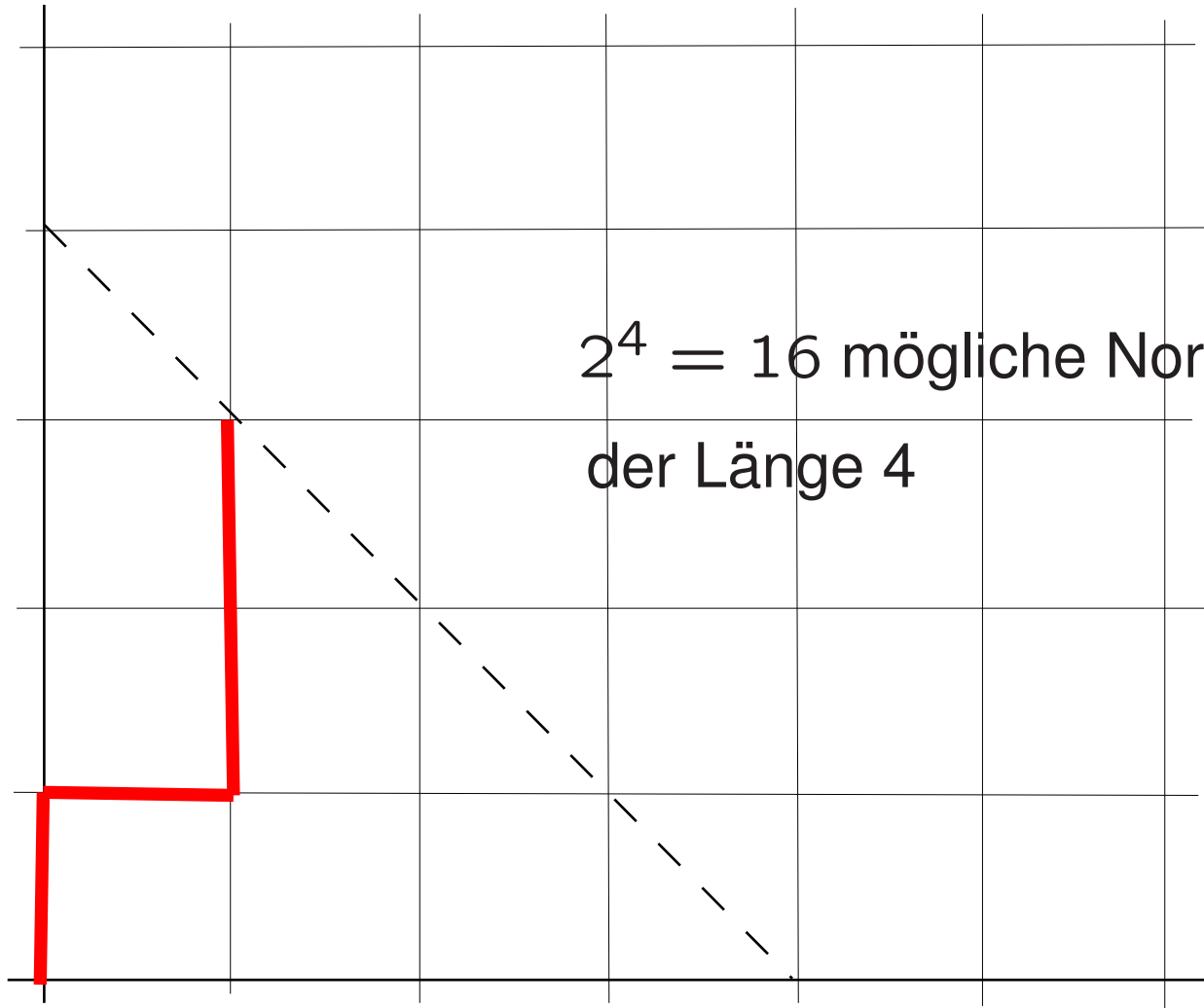


A





B



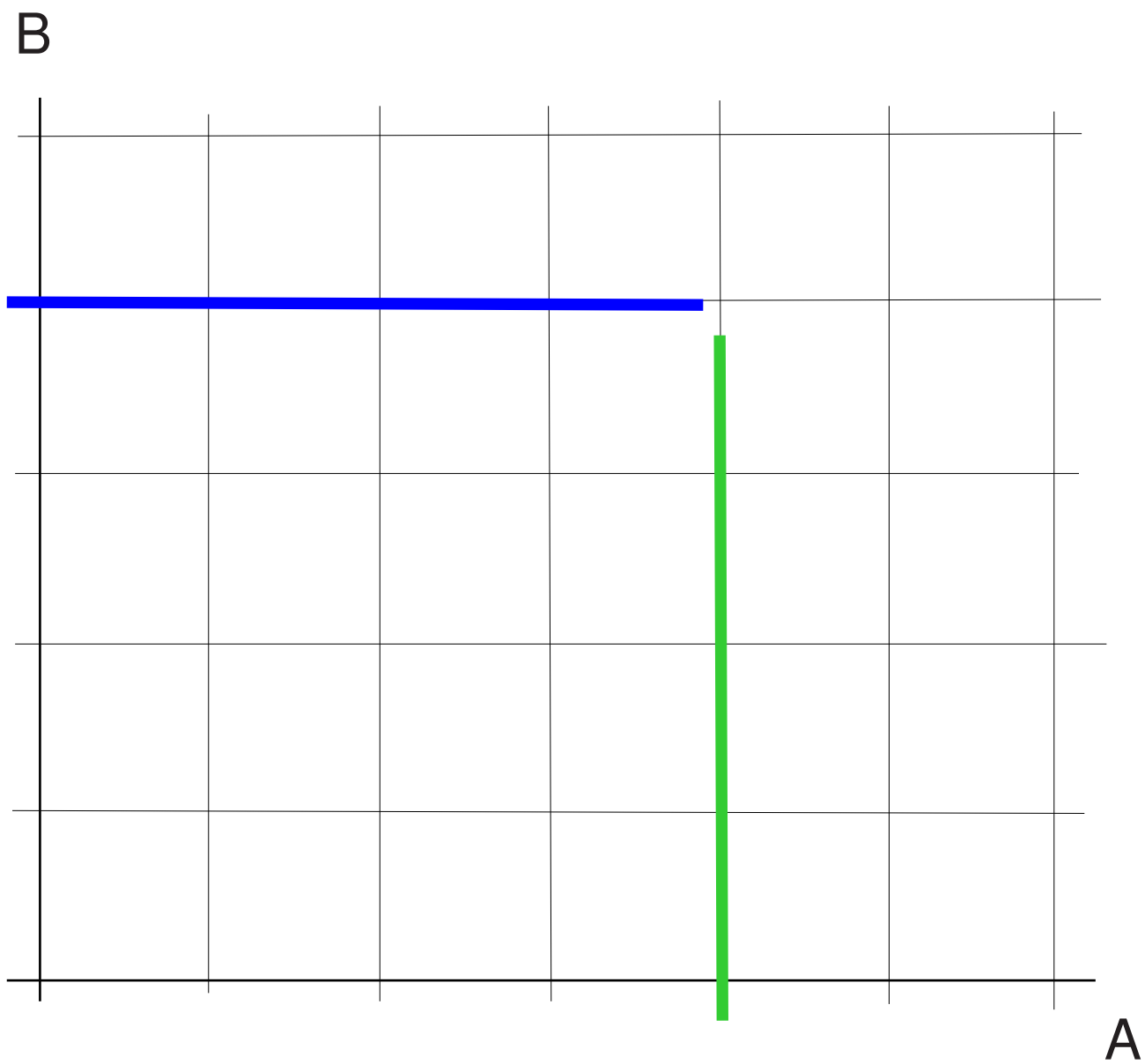
$2^4 = 16$ mögliche Nordostpfade
der Länge 4

A

Die Vereinbarung war:

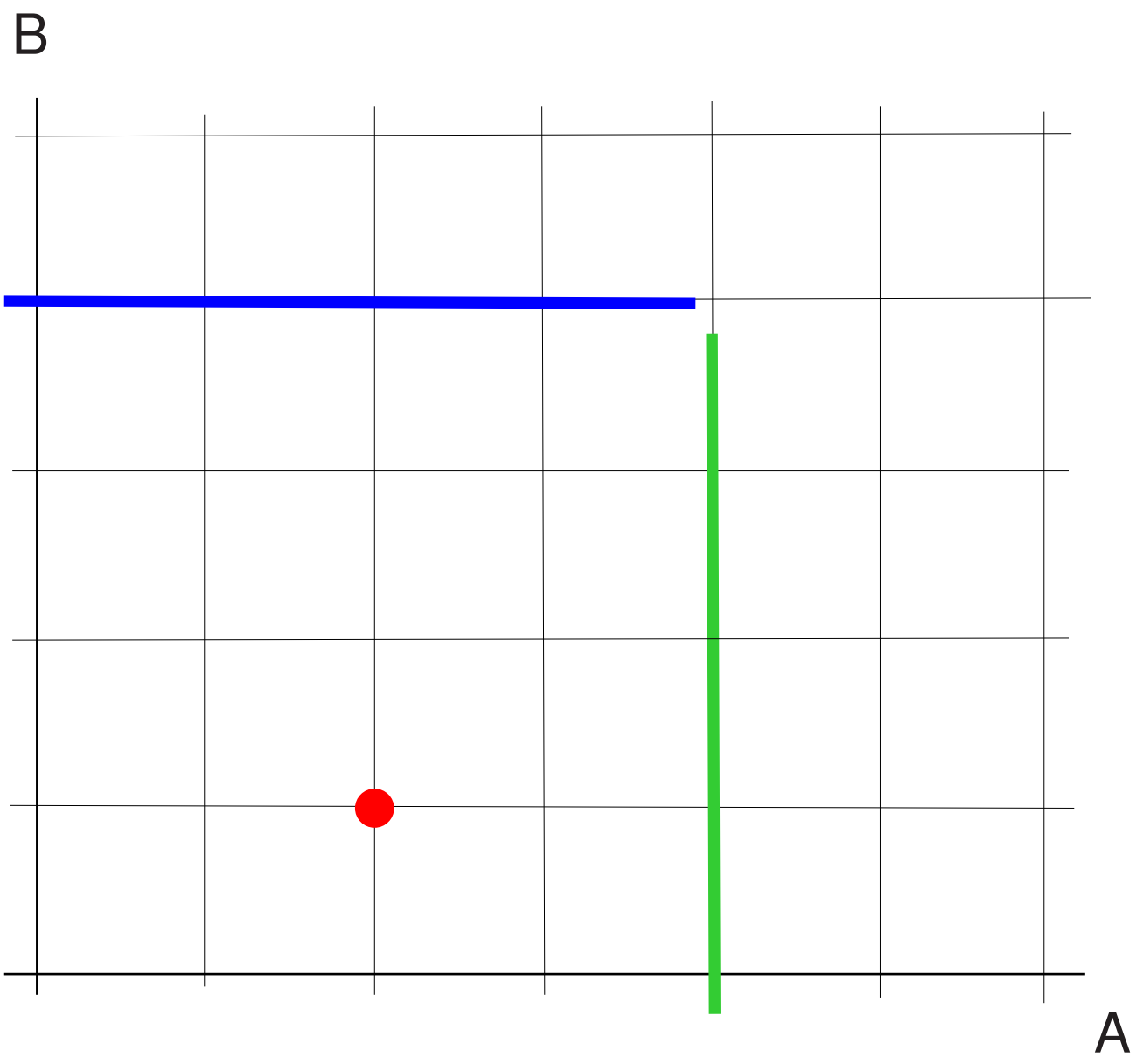
Derjenige Spieler bekommt den ganzen Einsatz,

der als erster 4 Runden gewonnen hat.

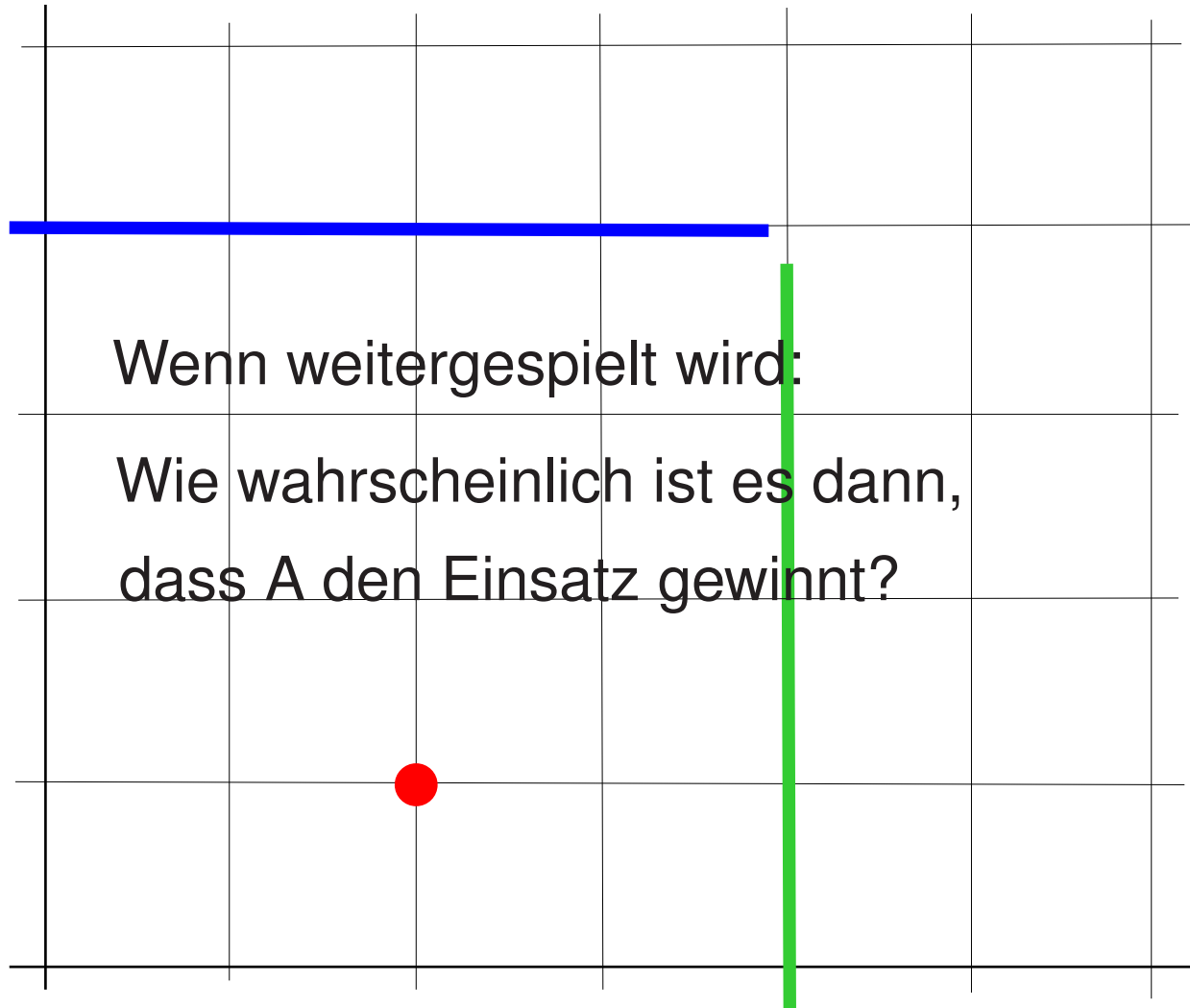


Der aktuelle Spielstand ist

2:1 für A.



B



Wenn weitergespielt wird:

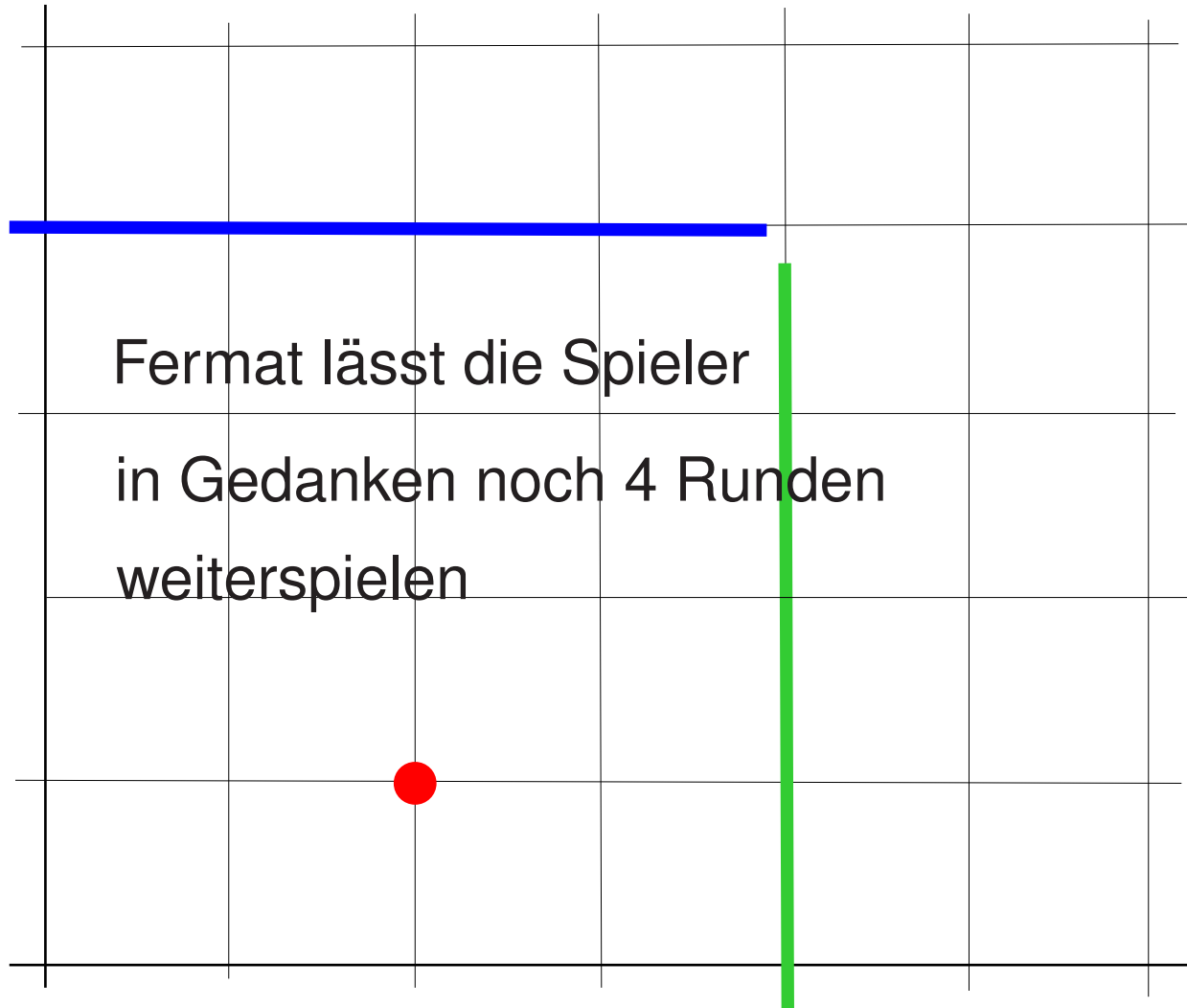
Wie wahrscheinlich ist es dann,
dass A den Einsatz gewinnt?

A

Fermats Lösungsweg:

Intelligentes Zählen von Pfaden

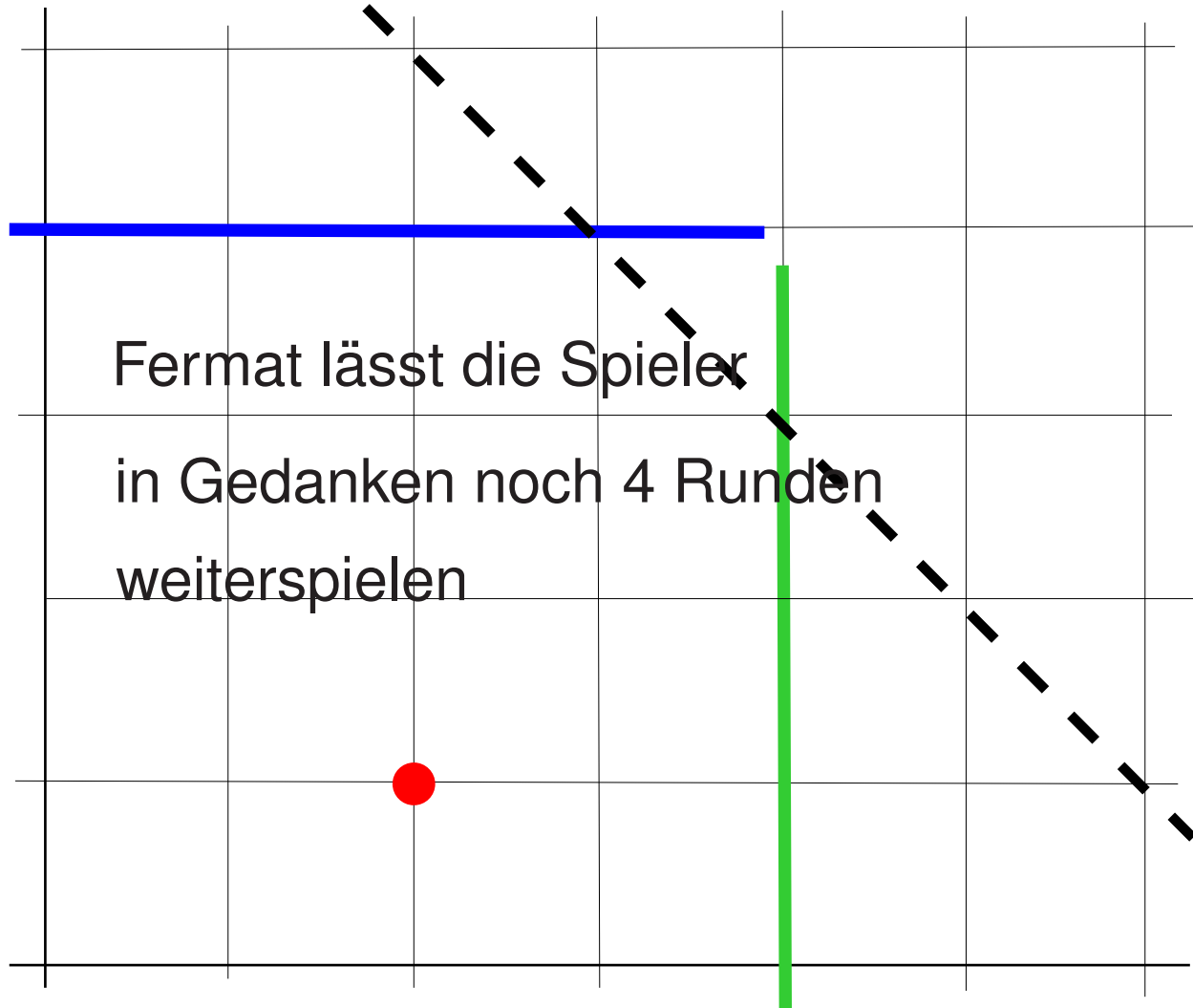
B



Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weitspielen

A

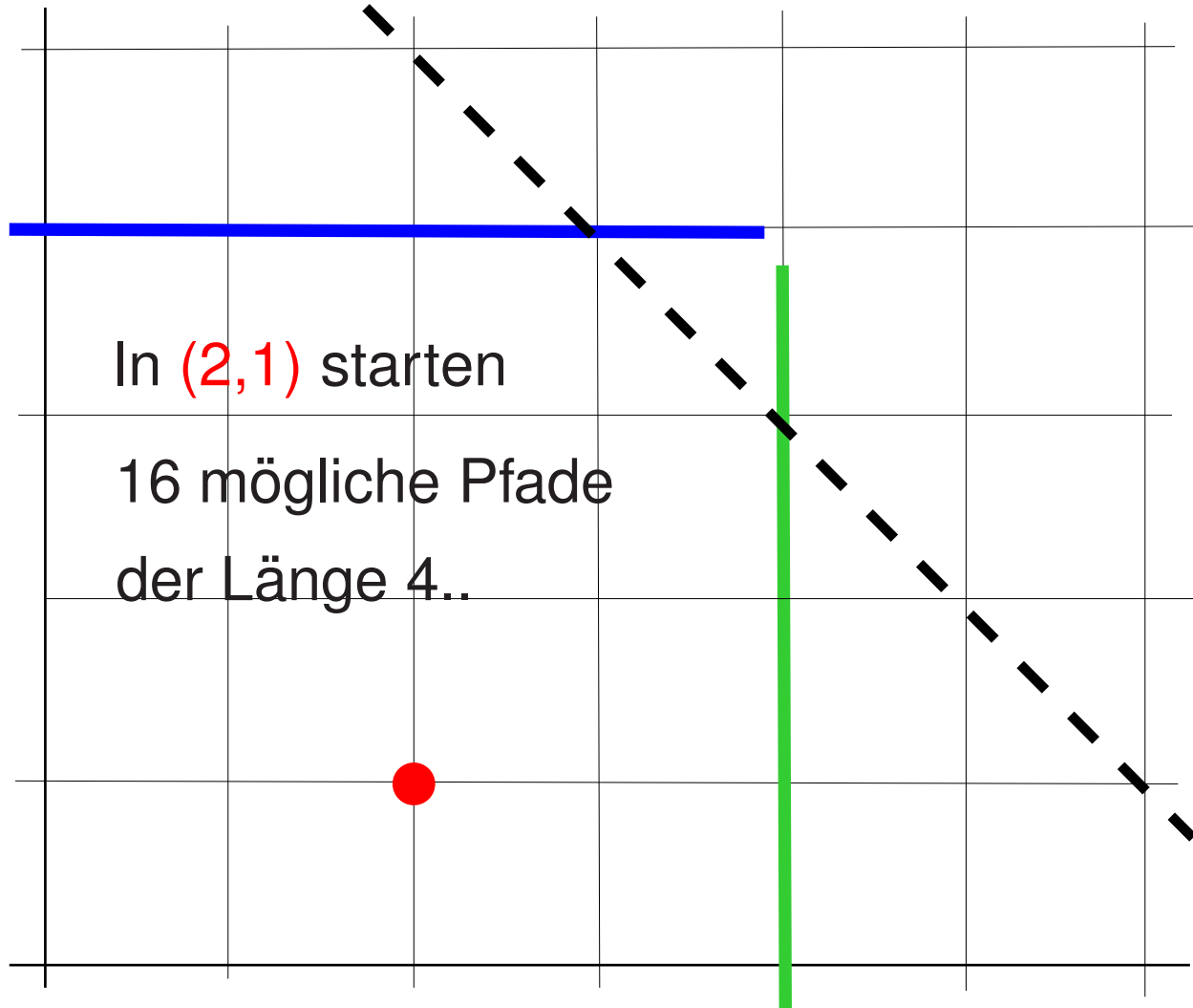
B



Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weiterspielen

A

B



In (2,1) starten

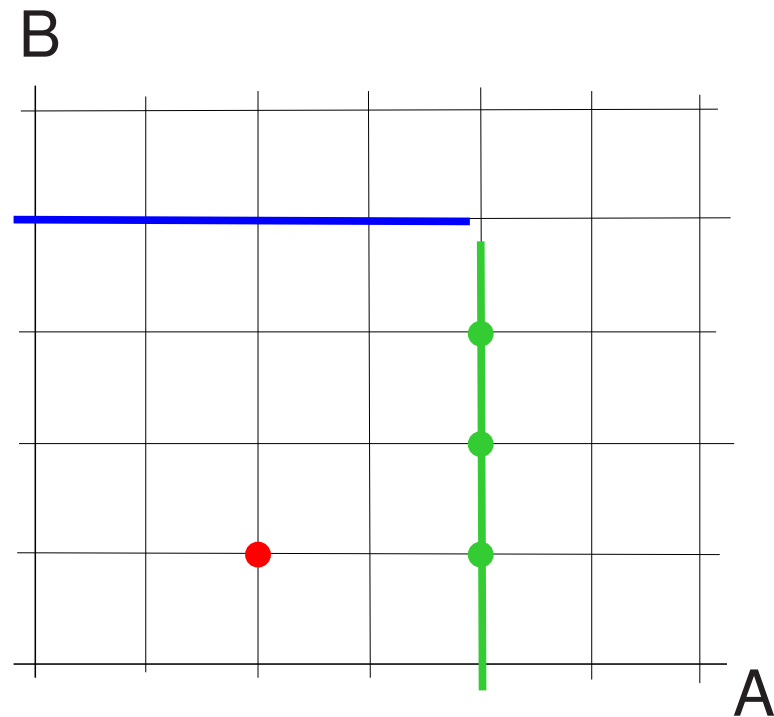
16 mögliche Pfade

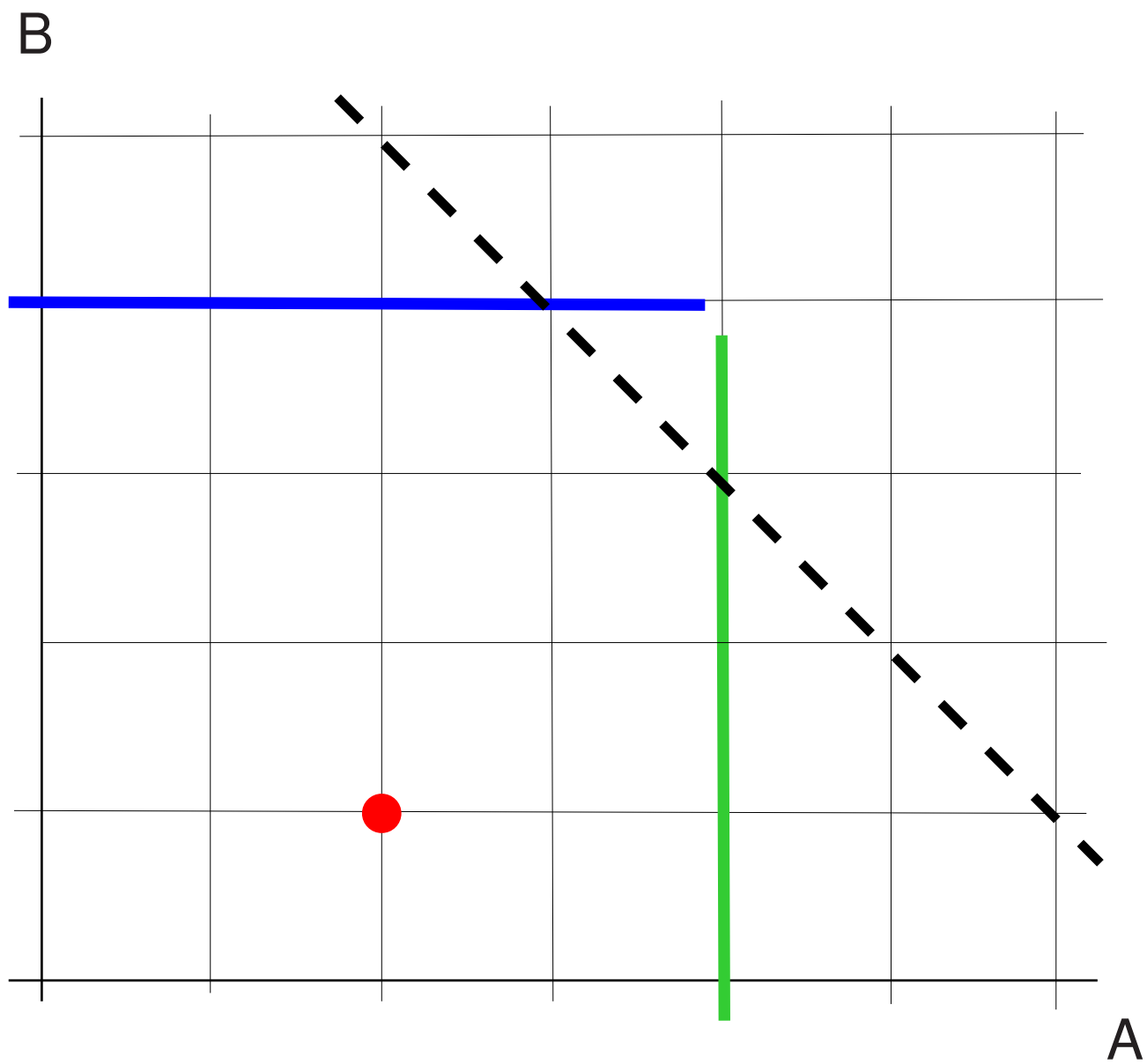
der Länge 4..

A

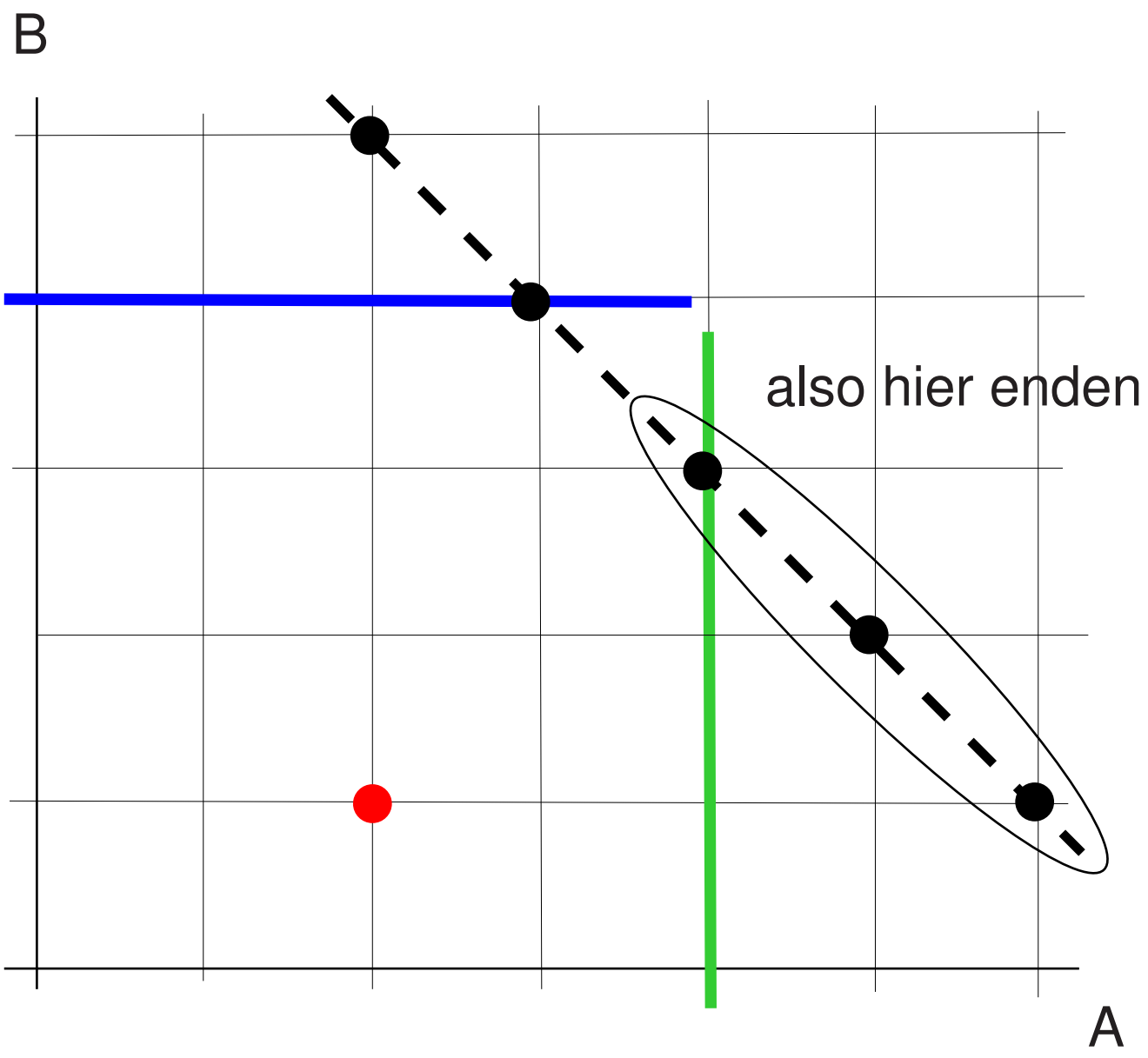
In (2,1) starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.

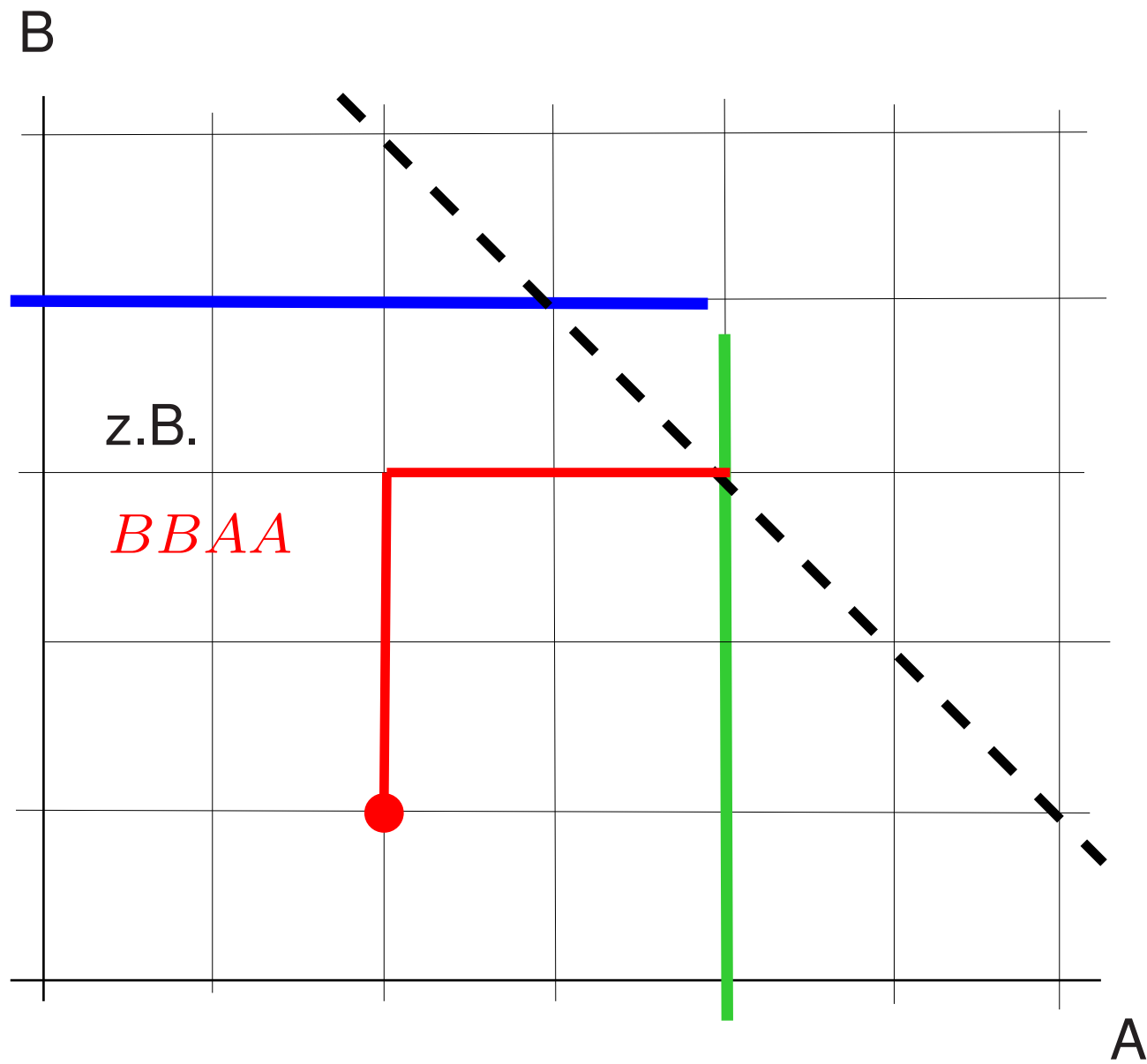
In $(2,1)$ starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.
Wieviele davon treffen auf den Ostrand $\{4\} \times \{1, 2, 3\}$
des Quadrates?





Das sind genau die Pfade der Länge 4,
die mindestens zwei Schritte nach Osten gehen,





die 16 “Nordostpfade” der Länge 4
in lexikographischer Ordnung
(spaltenweise gelesen):

<i>AAAA</i>	<i>ABAA</i>	<i>BAAA</i>	<i>BBAA</i>
<i>AAAB</i>	<i>ABAB</i>	<i>BAAB</i>	<i>BBAB</i>
<i>AABA</i>	<i>ABBA</i>	<i>BABA</i>	<i>BBBA</i>
<i>AABB</i>	<i>ABBB</i>	<i>BABB</i>	<i>BBBB</i>

die mit mindestens zwei *A*
und die mit weniger als zwei *A*:

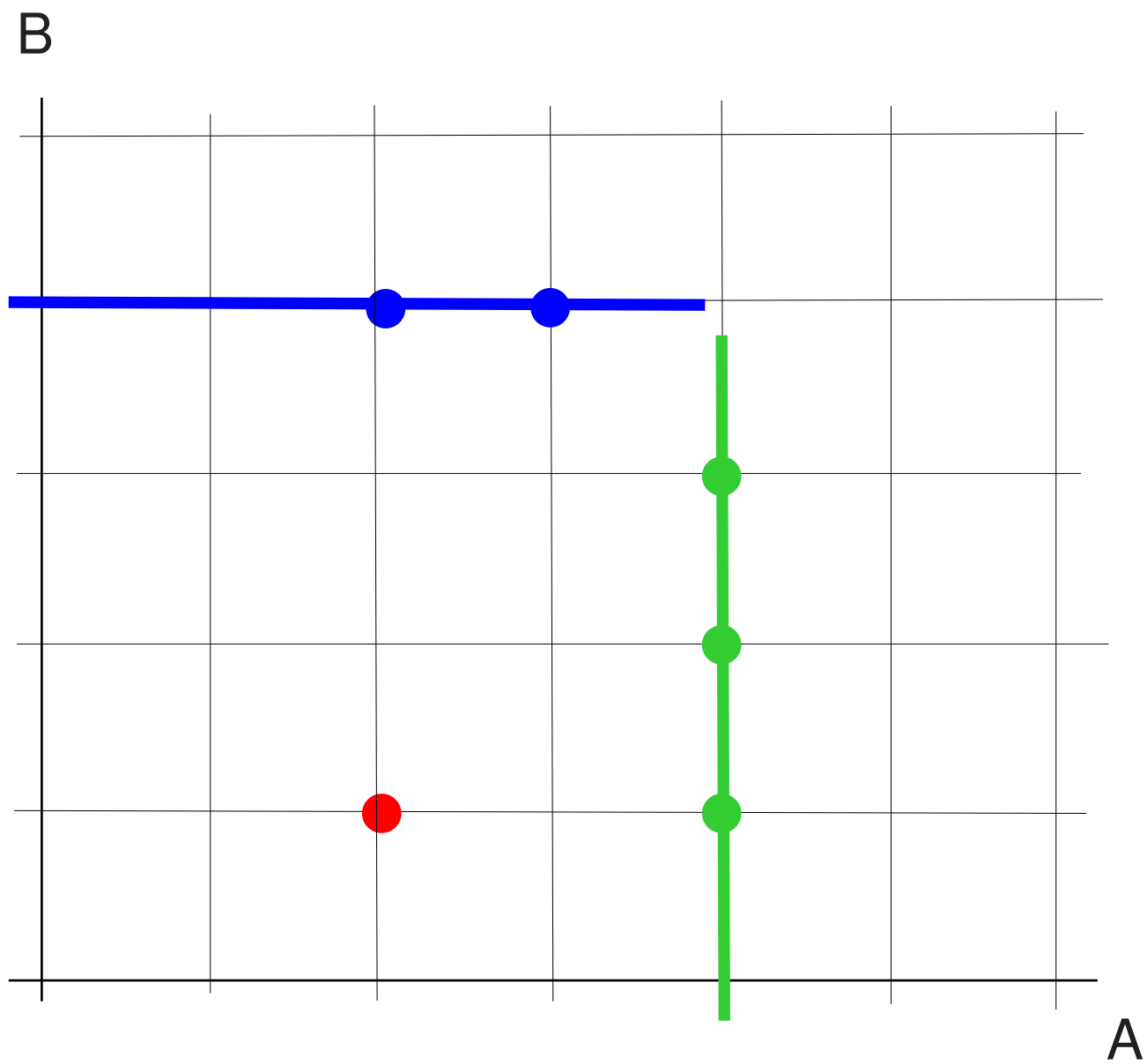
<i>AAAA</i>	<i>ABAA</i>	<i>BAAA</i>	<i>BBAA</i>
<i>AAAB</i>	<i>ABAB</i>	<i>BAAB</i>	<i>BBAB</i>
<i>AABA</i>	<i>ABBA</i>	<i>BABA</i>	<i>BBBA</i>
<i>AABB</i>	<i>ABBB</i>	<i>BABB</i>	<i>BBBB</i>

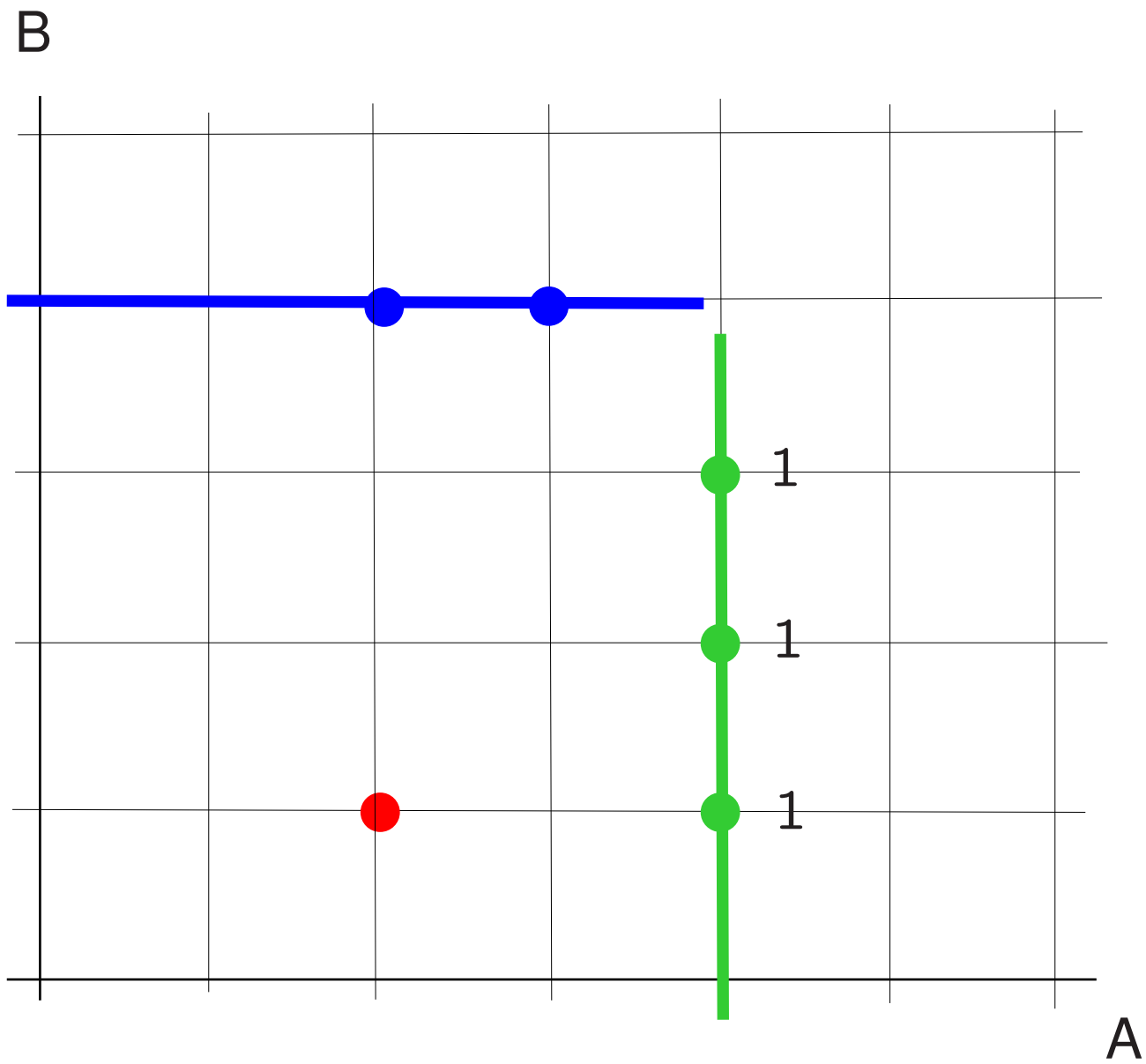
Die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, ist

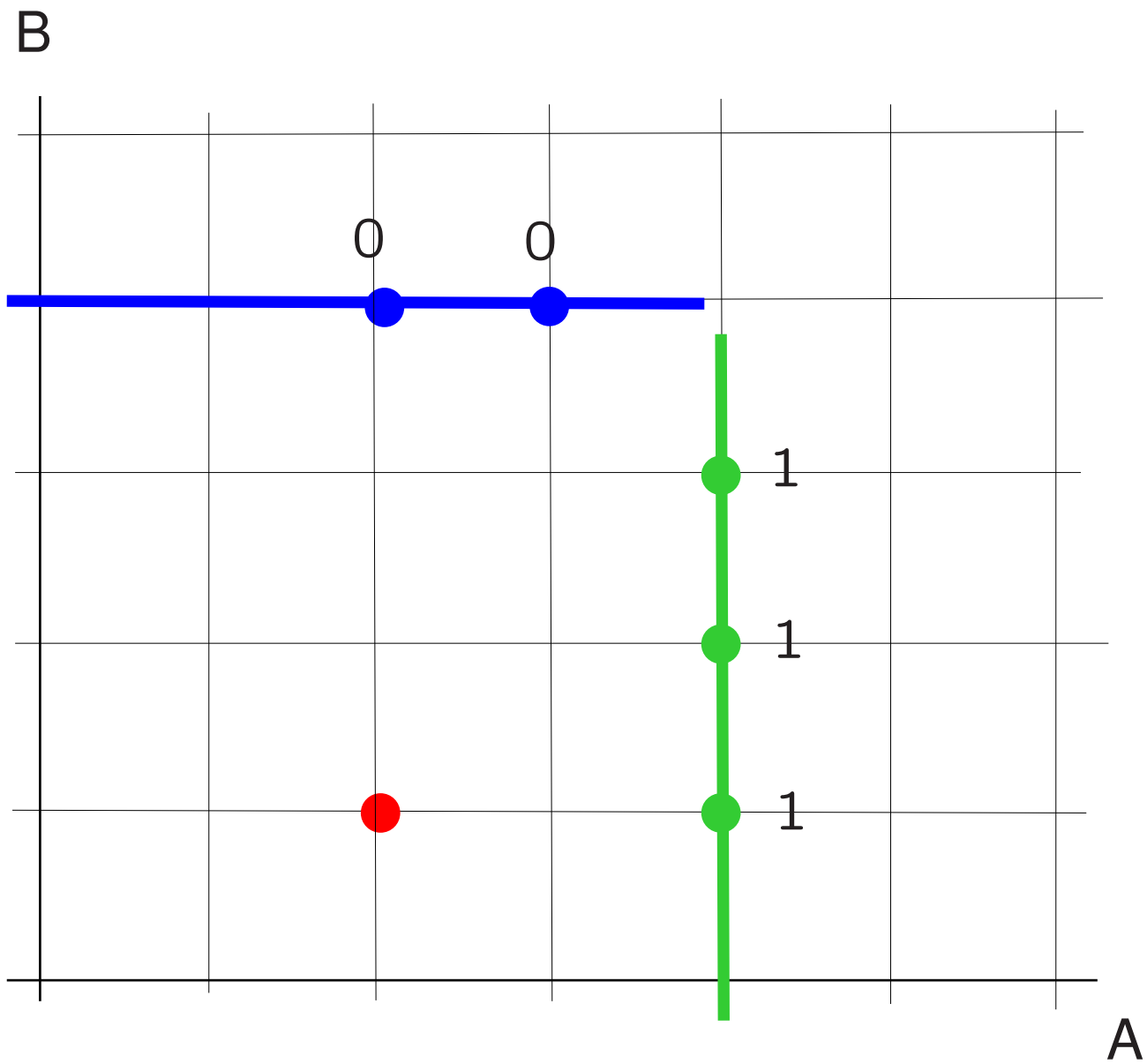
$$\frac{11}{16}.$$

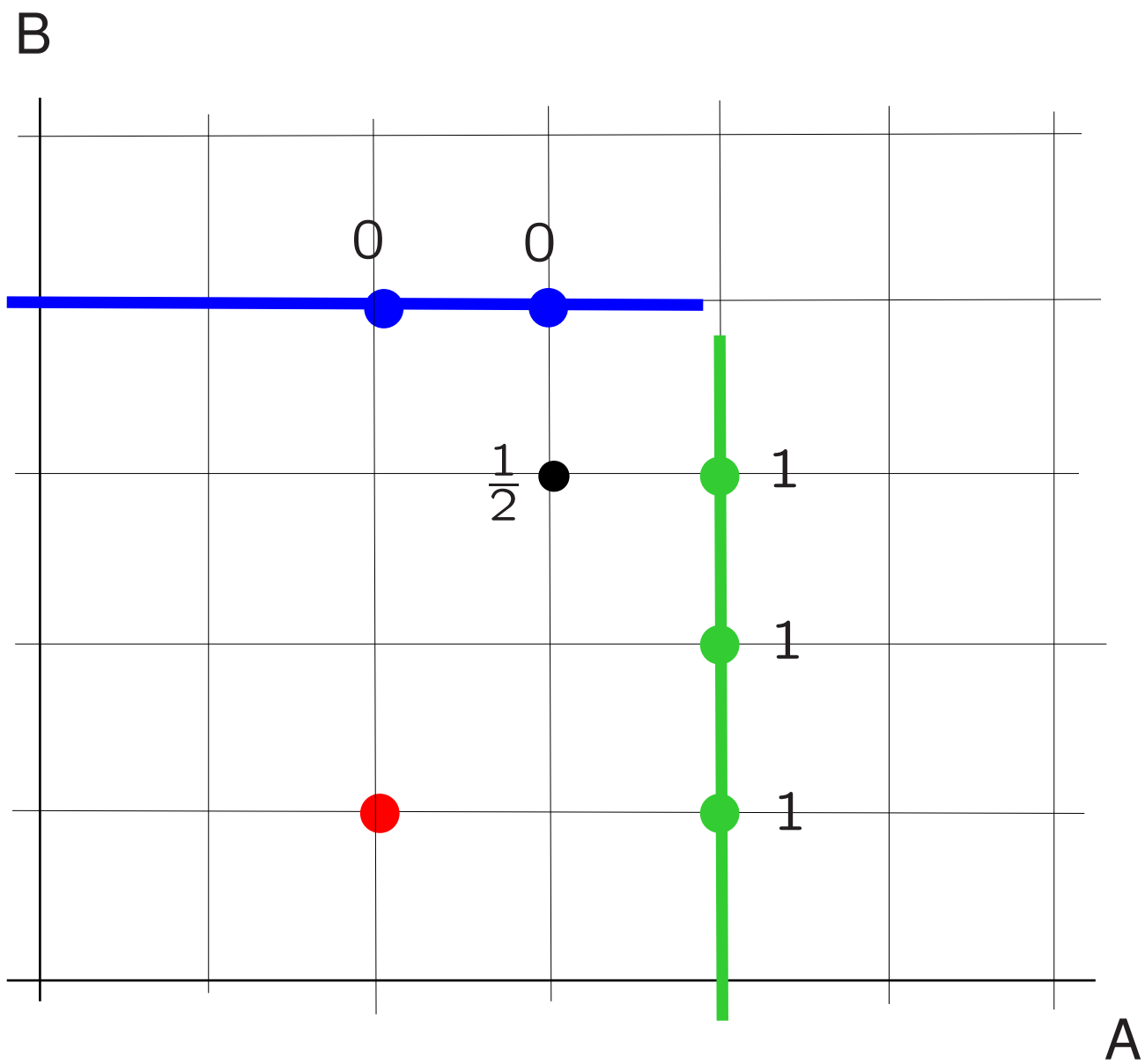
Pascals Lösungsweg:

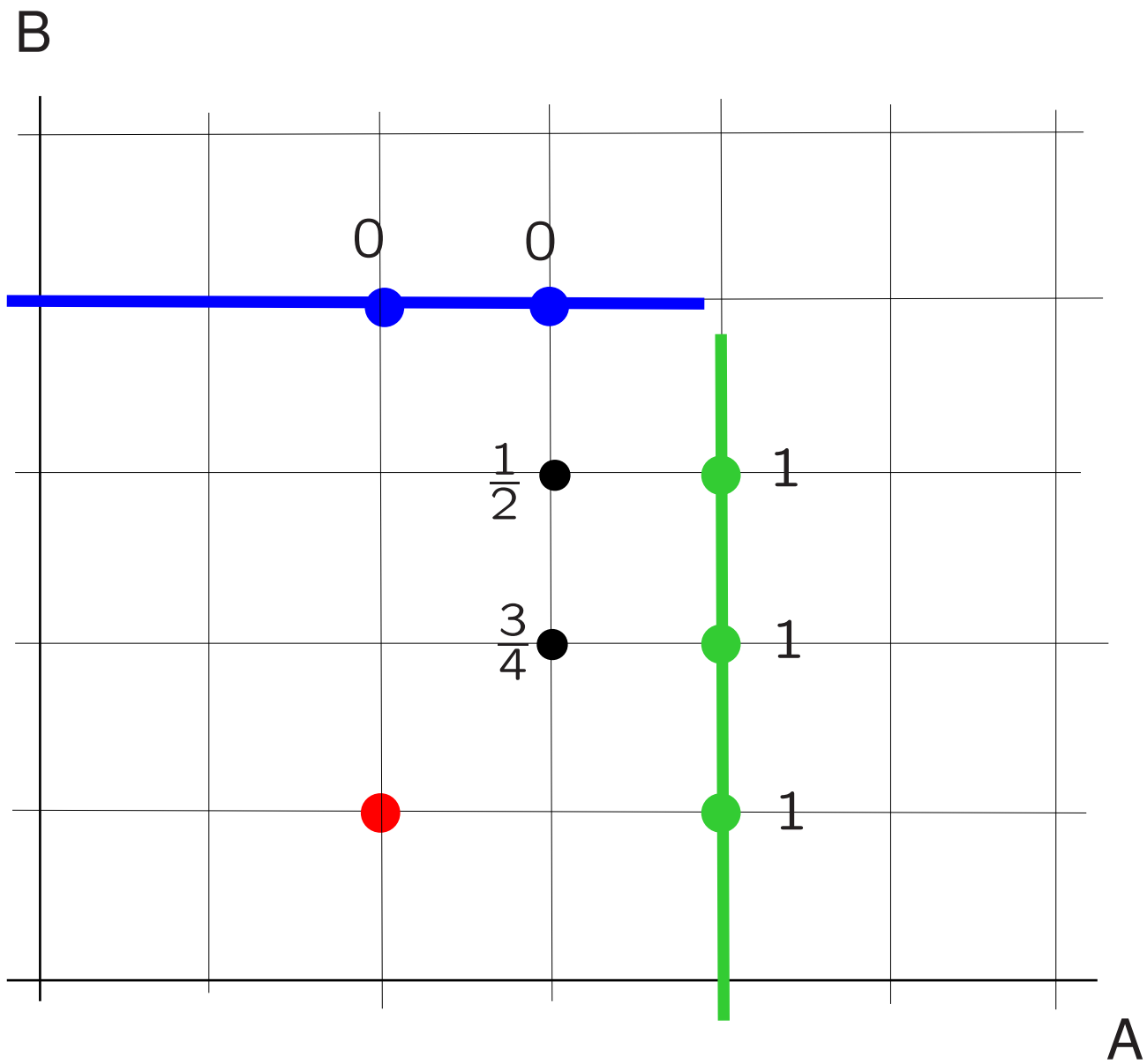
Die Methode der Rückwärtsinduktion

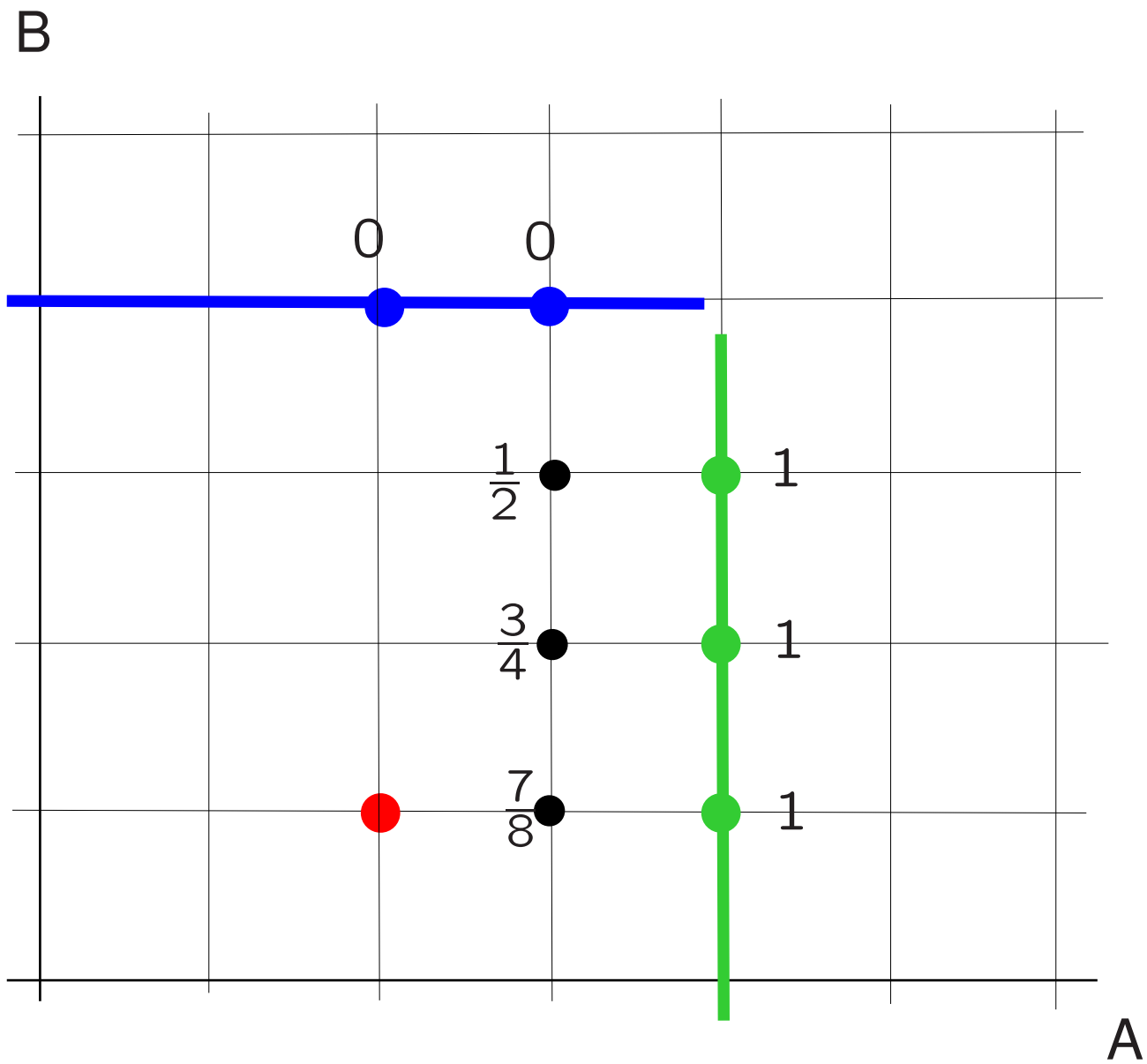


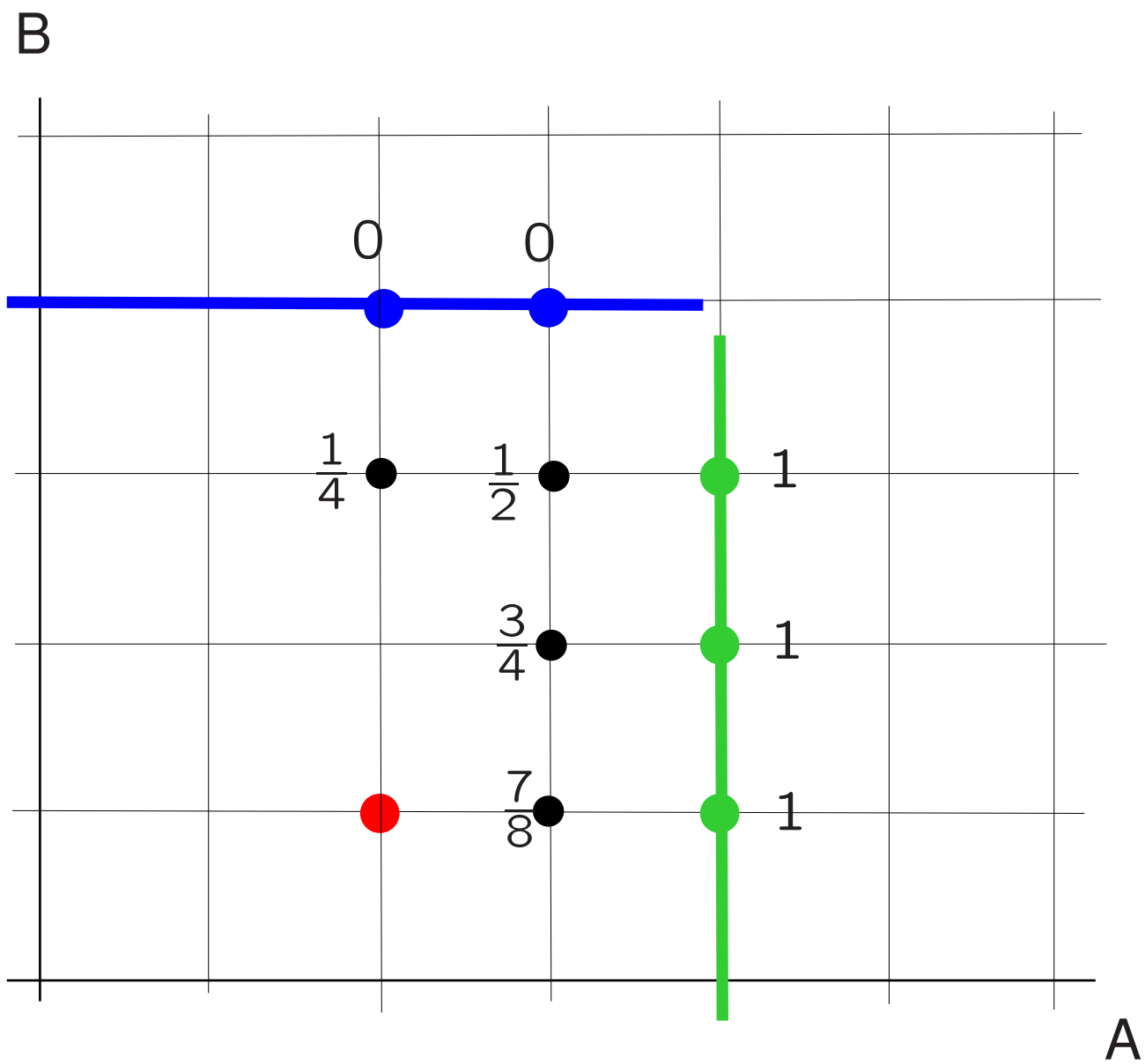


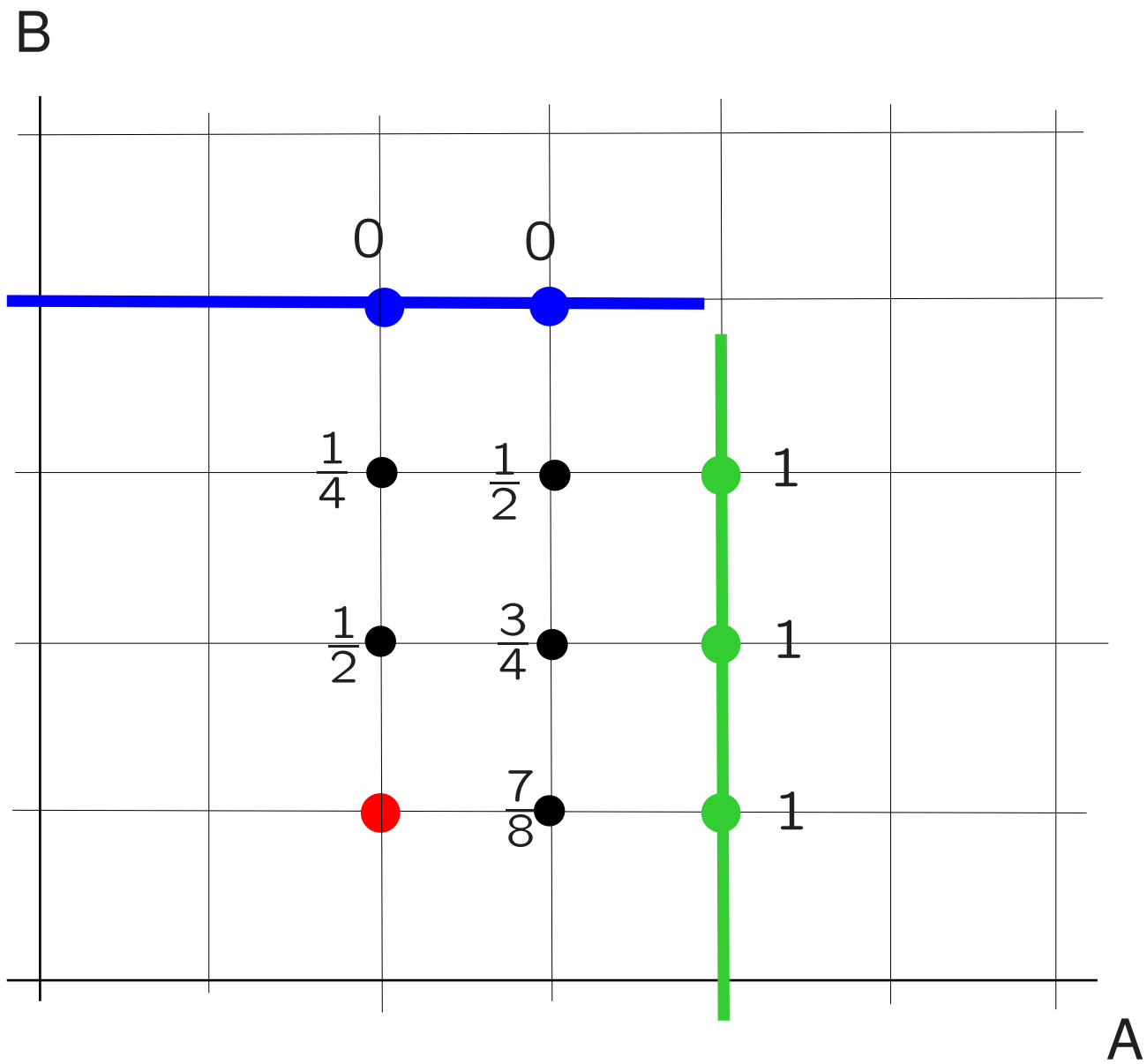


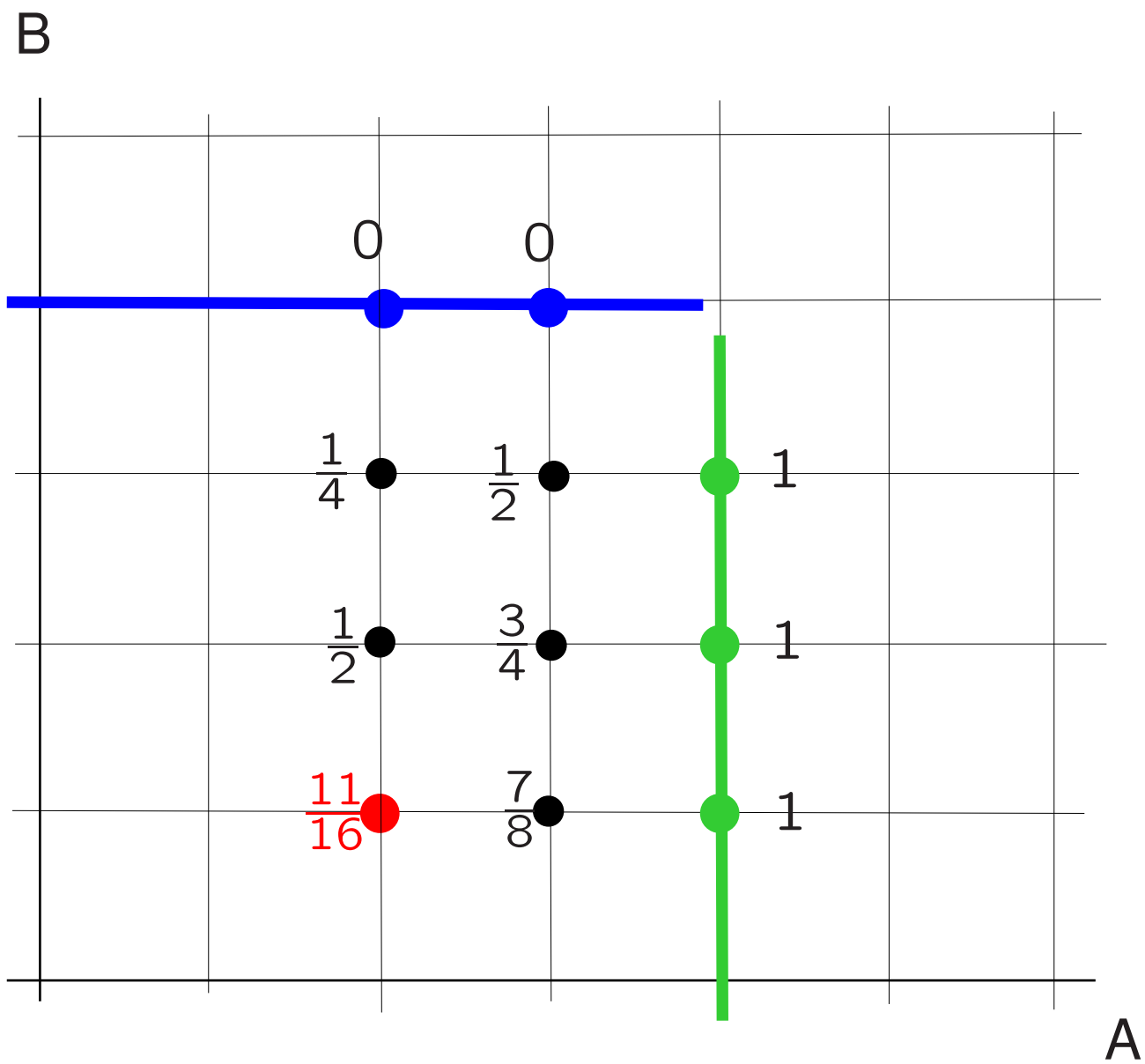












Pascal an Fermat (1654):

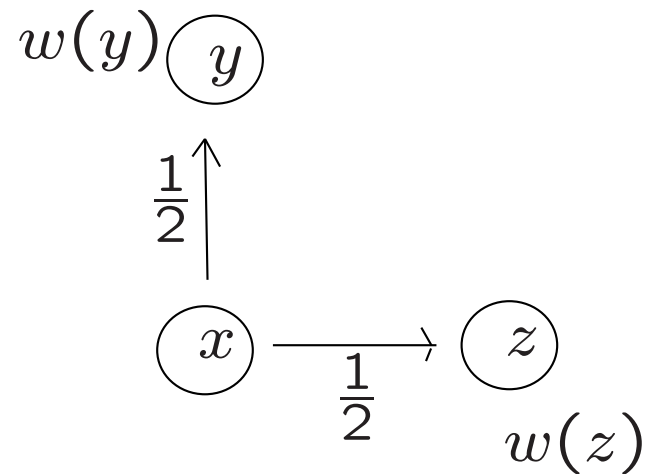
*“Je vois bien que la verité est la même
à Toulouse et à Paris...”*

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand a sei $w(a)$.

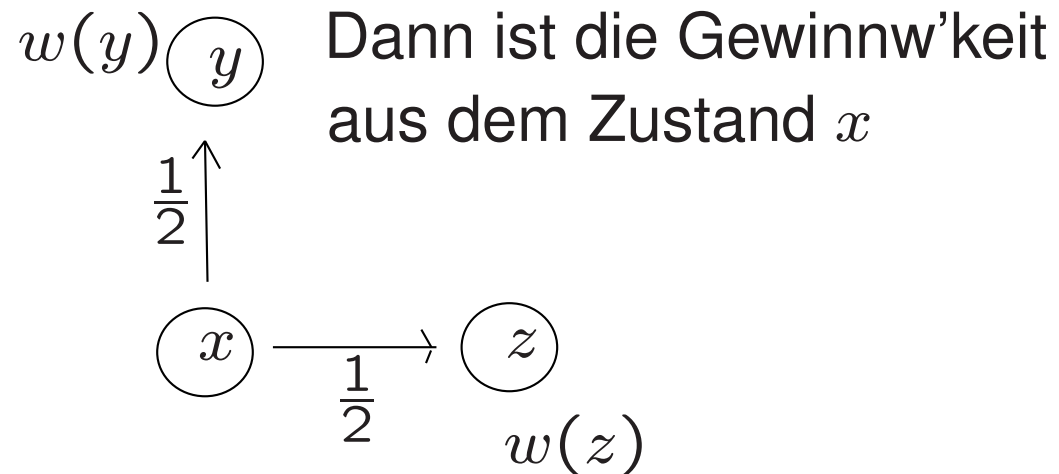
Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt
mit W'keit $1/2$ nach y und mit W'keit $1/2$ nach z .



Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand a sei $w(a)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt
mit W'keit $1/2$ nach y und mit W'keit $1/2$ nach z .



Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand a sei $w(a)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt
mit W'keit $1/2$ nach y und mit W'keit $1/2$ nach z .

