

Vorlesung 12b

Relative Entropie

Teil 4:

Die Wahrscheinlichkeit großer Abweichungen

Beim n -fachen Würfeln mit Gewichten $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_g)$

sind die relativen Häufigkeiten $K_1/n, \dots, K_g/n$

für großes n mit großer W'keit nahe bei $p_1, \dots, p_g$.

Wie wahrscheinlich ist ein “atypischer Ausgang” $(a_1, \dots, a_g)$

mit $a_j \sim nt_j$, $\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_g) \neq \mathbf{p}$?

$$\mathbf{P}_{\mathbf{p}}(K_1 = a_1, \dots, K_g = a_g) = \binom{n}{a_1, \dots, a_g} p_1^{a_1} \cdots p_g^{a_g}$$

Aus der Stirling-Formel folgt: $\binom{n}{a_1, \dots, a_g} \sim f(n) \frac{1}{t_1^{a_1} \cdots t_g^{a_g}}$

mit einem Faktor $f(n)$, der (nur) wie eine Potenz in n wächst. Also:

$$\mathbf{P}(K_1 = a_1, \dots, K_g = a_g) \sim f(n) \left(\left(\frac{p_1}{t_1} \right)^{t_1} \cdots \left(\frac{p_g}{t_g} \right)^{t_g} \right)^n$$

Nach dem Logarithmieren fällt der Faktor $f(n)$ nicht mehr ins Gewicht:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P}_{\mathbf{p}}(K_1 = a_1, \dots, K_g = a_g) &\sim n \sum_{j=1}^g t_j \ln \frac{p_j}{t_j} \\ &= -n D(\mathbf{t} || \mathbf{p}) \end{aligned}$$

mit $\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_g)$ und $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_g)$
aufgefasst als W-Verteilungen auf $\{1, \dots, g\}$

Fazit: Unter der Annahme $a_j \sim nt_j$ mit $n \rightarrow \infty$ gilt:

$\mathbf{P}_{\mathbf{p}}(K_1 = a_1, \dots, K_g = a_g)$
fällt exponentiell in n mit Rate $D(\mathbf{t} || \mathbf{p})$.



$$S = k \log W$$

Entropie =
k mal
Logarithmus der
Wahrscheinlichkeit

Ludwig Boltzmann
1844-1906

Grabmal am
Wiener
Zentralfriedhof

Quelle: Wikipedia