Vorlesung 12b

Relative Entropie

Teil 2:

Die Informationsungleichung

Satz: („Informationsungleichung") $D(\rho\|\pi) \geq 0$.

Beweis: Wieder verwenden wir die Abschätzung

$\log x \leq c \cdot (x-1)$ mit $c := \log'(1)$:

$$D(\rho\|\pi) = -\sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log \frac{\pi(a)}{\rho(a)}$$

$$\geq -\sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a)\, c \cdot \left(\frac{\pi(a)}{\rho(a)} - 1\right)$$

$$= -c\Big(\sum_{a:\rho(a)>0} \pi(a) - \sum_a \rho(a)\Big) \geq 0. \quad \Box$$

Bemerkung: Aus $D(\rho\|\pi) = 0$ folgt $\rho = \pi$.

In der Tat: In der Ungleichung $\quad \log x \le c(x-1)$

besteht (abgesehen für $x = 1$) *strikte* Ungleichung.

Also folgt aus

$$- \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log \frac{\pi(a)}{\rho(a)} = -c \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \Big(\frac{\pi(a)}{\rho(a)} - 1 \Big) \,,$$

dass $\quad \pi(a) = \rho(a)$ für alle a mit $\rho(a) > 0$.

Daraus folgt $\quad \sum\limits_{a:\rho(a)>0} \pi(a) = 1,$ also $\sum\limits_{a:\rho(a)=0} \pi(a) = 0,$

somit auch $\quad \pi(a) = \rho(a)$ für alle a mit $\rho(a) = 0$. $\square$

Zusammenfassend ergibt sich der

Satz (von der relativen Entropie):

Die relative Entropie $D(\rho\|\pi)$ ist nichtnegativ,

und verschwindet genau für $\rho = \pi$.