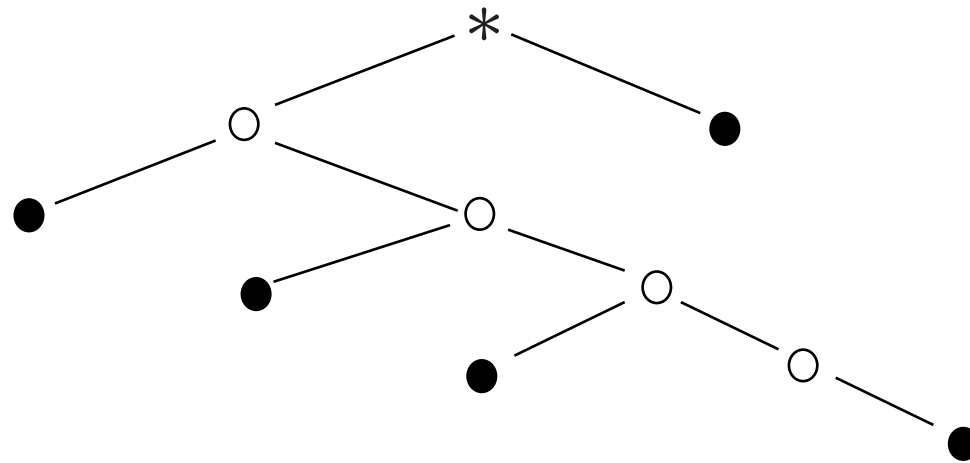


# Vorlesung 12a

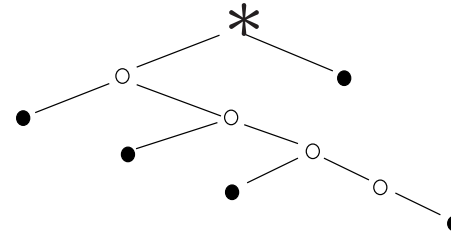
## Quellencodieren und Entropie

### Teil 1

### Binärbäume als gerichtete Graphen



Wir betrachten planare (d.h. in die Ebene gezeichnete),  
verwurzelte Binärbäume



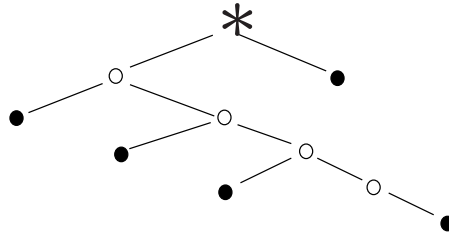
Ihre Merkmale sind:

Ein Knoten ist ausgezeichnet als *Wurzel*.

Jeder Knoten (außer der Wurzel) hat genau einen Vorgänger.

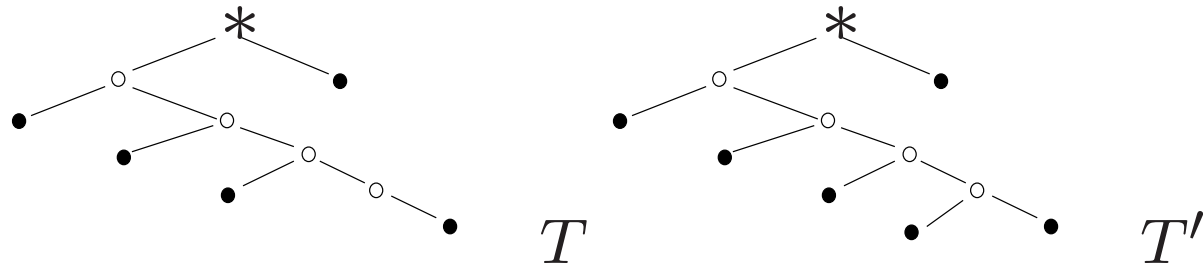
Jeder Knoten hat zwei, einen oder keinen Nachfolger.

Die Knoten ohne Nachfolger heißen *Blätter*,  
die mit Nachfolger heißen *innere Knoten*.



Wir sprechen von einem *vollen Binärbaum*,  
wenn jeder innere Knoten zwei Nachfolger hat.

Der obige Binärbaum ist nicht voll.



Wir sprechen von einem *vollen Binärbaum*,  
wenn jeder innere Knoten zwei Nachfolger hat.

Jeder Binärbaum  $T$  lässt sich “auf minimale Weise”  
zu einem vollen Binärbaum  $T'$  ergänzen.

Wir nennen  $T'$  die Vervollständigung von  $T$ .

Sei  $T$  ein Binärbaum.

Die gewöhnliche Irrfahrt auf  $T$

- macht von jedem inneren Knoten einen Schritt zu einem zufällig gewählten seiner Nachfolger (davon gibt's 1 oder 2)
- und endet in einem der Blätter.

Wenn nicht anderes vermerkt, nehmen wir immer an, dass die Irrfahrt in der Wurzel startet.

Sei  $T$  ein Binärbaum auf  $T$   
und  $Y$  die gewöhnliche Irrfahrt auf  $T$

Dann gilt für jedes Blatt  $b$  von  $T$  mit Tiefe  $\ell(b)$ :

$$\mathbf{P}(Y \text{ endet in } b) \geq 2^{-\ell(b)}$$

(denn auf dem Weg von der Wurzel zu  $b$  muss  
 $\leq \ell(b)$ -mal das “richtige” Münzwurfergebnis kommen)

Ist  $T$  voll, dann gilt hier Gleichheit.

Folgerung:

Für **jeden Binärbaum  $T$**  mit Blattmenge  $B$  gilt:

$$\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} \leq 1.$$

Für **jeden endlichen Binärbaum  $T$**  gilt:

Ist  $T$  voll, dann gilt  $\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} = 1.$

Ist  $T$  nicht voll, dann gilt die entsprechende Gleichheit  
für die Vervollständigung  $T'$  von  $T$ .

$T'$  hat dann mehr Blätter als  $T$ , also ist

$$\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} < 1.$$



Dies fassen wir zusammen in der

### **Bemerkung**

zu den Blatttiefen von Binärbäumen:

Für **jeden Binärbaum**  $T$

mit (endlicher oder abzählbar unendlicher) Blattmenge  $B$

und Blatttiefen  $\ell(b)$ ,  $b \in B$ , gilt

$$\sum_{b \in B} 2^{-\ell(b)} \leq 1.$$

Ist  $T$  **endlich**, dann gilt hier Gleichheit genau dann  
wenn  $T$  voll ist.

Wir fragen:

Welche Bedingung an natürliche Zahlen  $t_1, \dots, t_m$   
ist notwendig und hinreichend dafür,  
dass diese Zahlen  
als Blatttiefen eines binären Baumes auftreten?

Die Antwort gibt die

Fano-Kraft Ungleichung für endliche binäre Bäume:

$t_1, \dots, t_m$  seien natürliche Zahlen.

Genau dann gibt es einen binären Baum  $T$ ,  
für den die  $t_1, \dots, t_m$  die Tiefen seiner Blätter sind,  
wenn gilt:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^m 2^{-t_i} \leq 1.$$

Beweis:

“ $\implies$ ” siehe die obige **Bemerkung**  
zu den **Blattiefen von Binärbäumen**.

“ $\Longleftarrow$ ”: mit Induktion: Für  $m = 1$  ist die Behauptung klar.

Schritt vom  $m$  zu  $m + 1$ :

Seien  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m+1}$  natürliche Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^{m+1} 2^{-t_i} \leq 1. \text{ Dann gilt}$$

$$(+)\quad \sum_{i=1}^m 2^{-t_i} < 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Binärbaum  $T_m$  mit Blatttiefen  $t_1, \dots, t_m$ . Wegen (+) und der **Bemerkung zu den Blatttiefen von Binärbäumen** ist  $T_m$  nicht voll, besitzt also einen inneren Knoten (in Tiefe  $< t_m$ ) mit nur einem Nachfolger.

Zu diesem Knoten fügen wir einen zweiten Nachfolger hinzu und setzen (falls  $t_{m+1} > t_m$ ) seine “Nachkommenslinie” fort, bis wir bei der Tiefe  $t_{m+1}$  angekommen sind. Damit ist ein Binärbaum mit den Blatttiefen  $t_1, \dots, t_{m+1}$  konstruiert.  $\square$

Bemerkung:

Seien  $t_1 \leq t_2 \leq \cdots t_{m+1}$  natürliche Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^{m+1} 2^{-t_i} \leq 1.$$

Die im vorigen Beweis konstruierten Binärbäume

$T_m$  und  $T_{m+1}$  sind so,

dass die Menge der Knoten von  $T_m$

eine Teilmenge der Menge der Knoten von  $T_{m+1}$  ist,

und die Menge Blätter von  $T_m$

eine Teilmenge der Menge der Blätter von  $T_{m+1}$  ist.

Fano-Kraft Ungleichung für unendliche binäre Bäume:

$t_1 \leq t_2 \leq \dots$  seien natürliche Zahlen.

Es gibt einen binären Baum  $T$ ,  
für den die  $t_1, t_2, \dots$  die Tiefen seiner Blätter sind,  
genau dann, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-t_i} \leq 1.$$

Beweis: “ $\implies$ ” folgt sofort aus der **Bemerkung zu den  
Blatttiefen von Binärbäumen.**

“ $\impliedby$ ” folgt aus der vorigen Bemerkung: Setze  $T := \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m$ .

□

Übung:

Skizziere den binären Baum mit Blatttiefenfolge  
(1, 2, 3, 4, ...).



**(Verwurzelte planare) Binärbäume aufgefasst als  
Teilmengen der Menge der endlichen 01-Folgen:**

Jeder Binärbäum lässt sich in natürlicher Weise  
in die Menge  $\bigcup_{t \in \mathbb{N}_0} \{0, 1\}^t$  einbetten, indem man seine Knoten  
mit endlichen 01-Wörtern beschriftet,  
nach den folgenden Regeln:

Regeln für die Beschriftung der Knoten mit 01-Wörtern:

Die Wurzel trägt das Wort der Länge 0 (das “leere Wort”).

Das Wort an einem Knoten (außer der Wurzel)  
setzt das Wort am Vorgängerknoten um ein Bit fort  
(die Wörter in der Tiefe  $t$  haben somit die Länge  $t$ ).

Verschiedene Knoten tragen verschiedene Wörter.

Beispiel:

