

Vorlesung 11b

Das Starke Gesetz der Großen Zahlen

Teil 4:

Das Lemma von Borel-Cantelli

(vgl. Buch S 83-84)

Ein Kernstück im Beweis des SGGZ war
die folgende Ungleichungskette:

Sei (E_n) irgendeine Folge von Ereignissen mit

$$(*) \quad \sum_n \mathbf{P}(E_n) < \infty.$$

Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$ wegen der σ -Subadditivität

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=\ell}^{\infty} E_n \right) \leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)$$

Wegen $(*)$ konvergiert die rechte Seite für $m \rightarrow \infty$ gegen 0.

Die rechte Seite ist nichtnegativ und hängt nicht von m ab,
muss also verschwinden.

Fazit: (*) impliziert $\mathbf{P} \left(\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=\ell}^{\infty} E_n \right) = 0$

Das Ereignis $\left\{ \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=\ell}^{\infty} E_n \right\}$ lesen wir als
“unendlich viele der E_n treten ein”.

Zusammengefasst ergibt sich das

Lemma von Borel-Cantelli:

Haben die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_n
eine endliche Summe, dann treten mit Wahrscheinlichkeit 1
nur endlich viele der E_n ein.

Beispiel: Lange Runs beim fairen Münzwurf

Sei $(Z_1, Z_2, \dots)$ eine faire Münzwurffolge.

Zu vorgegebenem $c > 0$ setzen wir

$$E_n := \{Z_n = 1 \text{ für alle } n \leq m \leq n + c \ln n\}.$$

Dafür gilt:

$$\mathbf{P}(E_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1 + \lfloor c \ln n \rfloor} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{c \ln n} = n^{-c \ln 2}.$$

Für $c > \frac{1}{\ln 2}$ folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_n) < \infty$,
also nach Borel-Cantelli

$$\mathbf{P}(\text{unendlich viele der } E_n \text{ treten ein}) = 0.$$