Vorlesung 11b

Das Starke Gesetz der Großen Zahlen

Teil 3:

Beweis des Schlüssel-Lemmas

(vgl. Buch S 81-82)

Die Aussage des Schlüssel-Lemmas ist:

Unter den Voraussetzungen des SGGZ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{ \bar{X}_n - \mu| > \frac{1}{k} \right\} \right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sei k fest . Wir setzen $E_n := \{|\bar{X}_n - \mu| > \frac{1}{k}\}$.

Wegen der σ-Subadditivität gilt

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n \geq m} \mathbf{P}(E_n).$$

Also reicht es zu zeigen:

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_n) < \infty.$$

Wir zeigen $(*)$ im Spezialfall $\mathbf{E}[X_i^4] < \infty$.

O.B.d.A sei $\mu = 0$, ansonsten betrachte $X_i - \mu$ statt X_i.

Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{k}$. Aus der Markov-Ungleichung folgt:

$$\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(|\bar{X}_n| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(\bar{X}_n^4 \geq \varepsilon^4)$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^4}\mathbf{E}[\bar{X}_n^4] = \frac{1}{\varepsilon^4}\frac{1}{n^4}\mathbf{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^4].$$

Der Rest des Beweises besteht darin, zu zeigen, dass das 4. Moment der Summe $X_1 + \cdots + X_n$ um so viel langsamer als n^4 wächst, dass die rechte Seite nicht nur gegen 0 konvergiert, sondern sogar summierbar ist in n. Damit ist dann $(*)$ erfüllt.

Wohlan!

Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\mathbf{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^4] = \mathbf{E}\left[\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} X_i X_j X_k X_\ell\right]$$

$$= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \mathbf{E}[X_i X_j X_k X_\ell].$$

Aus der Produktformel für Erwartungswerte unabhängiger Zufallsvariabler folgt:

$$\mathbf{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = 0, \;\; \mathbf{E}[X_1^2 X_2 X_3] = 0, \;\; \mathbf{E}[X_1^3 X_2] = 0.$$

Allgemeiner gilt: $\mathbf{E}[X_i X_j X_k X_\ell] = 0$, außer ein Paar aus i, j, k, ℓ bildet dieselbe Menge wie das andere, z.B. $\{i, j\} = \{k, \ell\}$. Also ist

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \mathbf{E}[X_i X_j X_k X_\ell] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[X_i^4]$$

$$+ \sum_{1\le i\ne j\le n} \Big(\mathbf{E}[X_i X_j X_i X_j] + \mathbf{E}[X_i X_i X_j X_j] + \mathbf{E}[X_i X_j X_j X_i]\Big)$$

$$\le 3 \sum_{1\le i,j\le n} \mathbf{E}[X_i^2 X_j^2] \le 3 \sum_{1\le i,j\le n} \mathbf{E}[X_i^4]^{1/2}\mathbf{E}[X_j^4]^{1/2}$$

$$= 3n^2\mathbf{E}[X_1^4],$$

wobei die letzte Abschätzung aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt (siehe V7b1).

Insgesamt ergibt sich

$$\frac{1}{n^4}\mathbf{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^4] \le \frac{3}{n^2}\mathbf{E}[X_1^4],$$

und mit der eingangs hergeleiteten Abschätzung folgt

die Summierbarkeit von $\mathbf{P}(E_n)$, d.h. $(*)$. $\square$

Eine Anwendung des Starken Gesetzes der Großen Zahlen:
Die fast sichere Konvergenz der Farb-Anteile in der Pólya-Urne.

In V11a4 hatten wir festgestellt:
Die Farbfolge $(F_1, F_2, \ldots)$ (1 für rot, 0 für blau) ist so verteilt wie $(Z_1, Z_2, \ldots)$, wobei $Z_i := I_{\{U_i < U_0\}}$.
Sei $W_n := 1 + F_1 + \ldots + F_n$
die Anzahl der roten Kugeln in der Urne nach n Zügen.
Die Folge $(W_n)_{n \geq 1}$ ist so verteilte wie $(1 + Z_1 + \cdots + Z_n)_{n \geq 1}$.

Das SGGZ liefert: $\mathbf{P}\left(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \to U_0 \text{ für } n \to \infty\right) = 1$
(denn bedingt unter $\{U_0 = p\}$ sind die Z_i u.i.v. mit Erwartungswert p).

Diese Konvergenz überträgt sich auf die Folge der Farbanteile $\frac{W_n}{n+1}$,
sie konvergiert für $n \to \infty$ fast sicher
gegen eine uniform auf $[0, 1]$ verteilte Zufallsvariable.