

Vorlesung 11b

Das Starke Gesetz der Großen Zahlen

Teil 2

Aussage und Kern des Beweises

(vgl. Buch S 76, S 81)

Das Starke Gesetz der Großen Zahlen (SGGZ) besagt:

Für $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte reellwertige Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und mit

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

gilt

$$\mathbf{P}(\bar{X}_n \rightarrow \mu) = 1.$$

Im Kern des Beweises steht das folgende **Schlüssel-Lemma**,
das wir (unter der Annahme endlicher 4. Momente der X_i)
in Teil 3 beweisen werden:

Unter den Voraussetzungen des SGGZ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{ |\bar{X}_n - \mu| > \frac{1}{k} \right\} \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Daraus folgt sofort für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P} \left(|\bar{X}_m - \mu| > \frac{1}{k} \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Für unkorrelierte X_i mit endlicher Varianz war das die
Aussage des Schwachen Gesetzes der Großen Zahlen.

Herleitung des SGGZ aus dem Schlüssellemma:

Für alle k und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=\ell}^{\infty} \left\{ |\bar{X}_n - \mu| > \frac{1}{k} \right\} \right) \leq \mathbf{P} \left(|\bar{X}_m - \mu| > \frac{1}{k} \right).$$

Die rechte Seite konvergiert wegen des Schlüssellemmas für $m \rightarrow \infty$ gegen 0. Die linke Seite ist nichtnegativ und hängt nicht von m ab, also muss sie verschwinden.

Damit ergibt sich

$$\mathbf{P} \left(\{\bar{X}_n \rightarrow \mu\}^c \right) = \mathbf{P} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=\ell}^{\infty} \left\{ |\bar{X}_n - \mu| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der σ -Subadditivität folgt. $\square$